

# Konstrukcje metalowe

## Wykład XIII

### Słupy

# Spis treści

Informacje ogólne → #t / 3

Nośność → #t / 8

Niestateczność → #t / 23

Interakcja różnych form niestateczności → #t / 77

Deformacje → #t / 93

Podsumowanie → #t / 95

Zagadnienia egzaminacyjne → #t / 98

## Informacje ogólne

Belki i kolumny - takie same przekroje, podobne obliczenia..

Różnice:

Belki - najważniejszy jest moment zginający

Słupy - najważniejsza jest siła osiowa

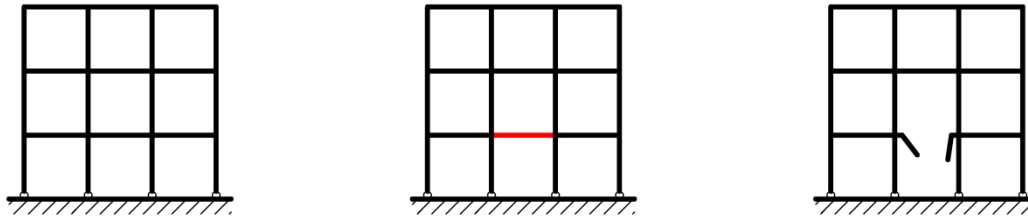
## Siły przekrojowe występujące w różnych typach elementów

→ #11 / 3

	$N_{Ed}$	$M_{Ed}$	$V_{Ed}$
Pręt kratowy	+	(+)	(+)
Pręt stężenia	+	(+)	(+)
Belka	(+)	+	+
Słup	+	+	+

## Zniszczenie pojedynczej belki

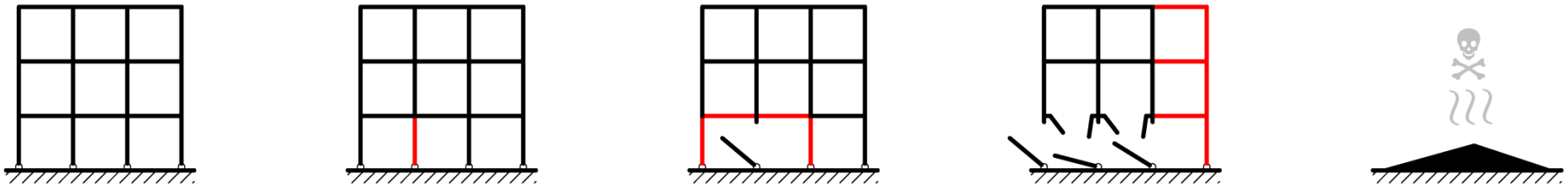
Rys: Autor



→ #7 / 58

Lokalne uszkodzenie konstrukcji

## Zniszczenie pojedynczego słupa



Całkowite zawalenie

Wniosek: słupy są ważniejsze dla całości; obliczenia muszą być dokładniejsze, zanalizować należy więcej zjawisk niż w przypadku belek.

## Analizowane zjawiska

	Belka	Słup
Ściskanie osiowe	Czasem	Zawsze
Wyboczenie giętne	Czasem	Zawsze
Zginanie	Zawsze	Bardzo często
Ścinanie	Zawsze	Bardzo często
Interakcja zginanie-ścinięcie	Zawsze	Bardzo często
Zwichrzenie	Zawsze	Bardzo często
Interakcja zginanie-ściskanie	Czasem	Bardzo często
Interakcja wyboczenie-zwichrzenie	Czasem	Bardzo często
Imperfekcje*	Nie	Tak
Efekty II rzędu*	Nie**	Tak

\* Analizowane pomocniczo przy utracie stateczności.

\*\* W pierwszej kolejności rozpatrujemy dla słupów; pomniejsze efekty pojawiają się też dla belek.

SGN:		SGU:
Nośność przekroju:	Stateczność:	
Siła osiowa → #t / 9 – 11, 15 – 16	Wyboczenie → #t / 24 – 71	Przechył → #t / 93 – 94
Ścinanie → #t / 9 – 11, 15 – 16		
Zginanie → #t / 9 – 11, 15 – 16	Zwichrzenie → #t / 72 – 76	
Zginanie dwukierunkowe → #t / 11, 13 – 21		
Zginanie ze ścinaniem → #t / 11, 13 – 17, 21 – 22	Interakcja wyboczenia i zwichrzenia → #t / 77 – 92	
Zginanie z siłą osiową → #t / 11, 13 – 22		

## Nośność

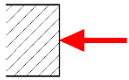
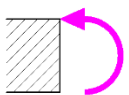
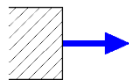
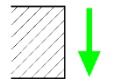
W przypadku nośności i interakcji sił przekrojowych używane są te same wzory dla słupów i belek:

I, II, III klasa przekroju → #11

IV klasa przekroju → #12

## Obliczanie nośności

Stal - różne wzory dla różnych klas przekroju

Obciążenie	I klasa	II klasa	III klasa	IV klasa
	$N_{Ed} / N_{c,Rd (1-3)} \leq 1,0$			$N_{Ed} / N_{c,Rd (4)} \leq 1,0$
	$M_{Ed (1)} / M_{Rd (1-2)} \leq 1,0$	$M_{Ed} / M_{Rd (1-2)} \leq 1,0$	$M_{Ed} / M_{Rd (3)} \leq 1,0$	$M_{Ed} / M_{Rd (4)} \leq 1,0$
	$N_{Ed} / N_{t,Rd} \leq 1,0$			
	$V_{Ed} / V_{Rd (1-3)} \leq 1,0$			$V_{Ed} / V_{Rd (4)} \leq 1,0$

→ #4 / 83

Rys: Autor

$$N_{c,Rd (1-3)} = A f_y / \gamma_{M0}$$

$$N_{c,Rd (4)} = A_{eff} f_y / \gamma_{M0}$$

$$M_{Rd (1-2)} = W_{pl} f_y / \gamma_{M0}$$

$$M_{Rd (3)} = W_{el} f_y / \gamma_{M0}$$

$$M_{Rd (4)} = W_{eff} f_y / \gamma_{M0}$$

$$V_{Rd (1-3)} = A_v f_y / (\gamma_{M0} \sqrt{3})$$

$V_{Rd (4)}$  = lokalna utrata stateczności + nieliniowa zależność między  $M_{Rd (4)}$  i  $N_{c,Rd (4)}$

$$N_{t,Rd} = A f_y / \gamma_{M0}$$

Oprócz nośności na zginanie (i sprawy zwiczenia), przeanalizować należy też nośność na ścinanie i na siłę osiową, ściskającą lub rozciągającą. Do tego dochodzi kwestia interakcji sił przekrojowych.

Siły przekrojowe	Interakcje → #11 / 51							
$M_{Ed, y}$	Orange	White	Pink	Green	White	Purple	Light Pink	White
$V_{Ed, z}$	Orange	White	White	White	White	White	Light Pink	Yellow-Green
$M_{Ed, z}$	White	Dark Red	Pink	White	Cyan	Purple	Light Pink	White
$V_{Ed, y}$	White	Dark Red	White	White	White	White	Light Pink	Yellow-Green
$N_{Ed, t}$	White	White	White	Green	Cyan	Purple	Light Pink	White
$N_{Ed, c}$	White	White	White	Green	Cyan	Purple	Light Pink	White
$T_{Ed}$	White	White	White	White	White	White	White	Yellow-Green

## Zjawiska ważne dla IV klasy przekroju:

- Cztery postaci niestateczności lokalnej:
  - Przy naprężeniach ściskających (przekrój efektywny);
  - Przy naprężeniach ściskających (niestateczność półki przy smukłym środkiku);
  - Przy ścinaniu;
  - Pod siłą poprzeczną
- Nieliniowe interakcje między  $M_{Ed}$ ,  $V_{Ed}$ ,  $N_{Ed}$ ,  $F_s$ ;

Interakcja między momentem zginającym a siłą osiową, zginanie dwukierunkowe, zginanie dwukierunkowe i siła osiowa jest obliczana według bardzo podobnych wzorów. Dodatkowym efektem jednoczesnego działania ściskającej siły osiowej i momentu zginającego jest interakcja między dwoma formami niestabilności: wyboczeniem giętnym i zwichrzeniem. Siła osiowa jest ważna przede wszystkim dla słupa. Z tego powodu informacje o takich zjawiskach zostaną przedstawione na wykładzie # 13

## Obliczenia w przypadku

- interakcji zginania i siły osiowej;
- dwukierunkowego zginania;
- dwukierunkowego zginania i siły osiowej

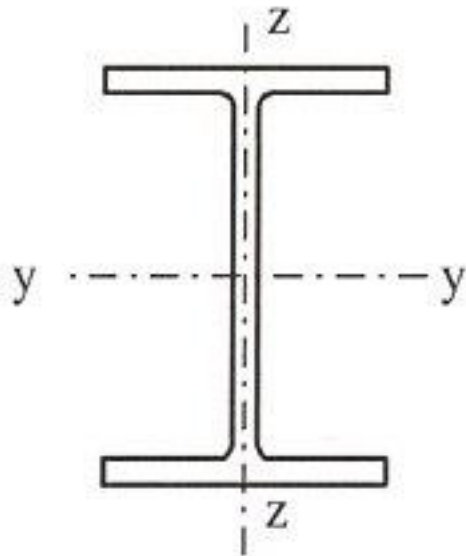
Są wykonywane w bardzo podobny sposób; występują jedynie drobne różnice.

W pierwszym kroku analizowany jest wpływ siły osiowej na nośności  $M_{Rd, y}$  i  $M_{Rd, z}$ ;

W kolejnym sprawdza się interakcję między  $M_{Ed, y}$  i  $M_{Ed, z}$ .

Obliczenia prowadzone są na poziomie przekroju.

Na poziomie przekroju:



Rys: Autor

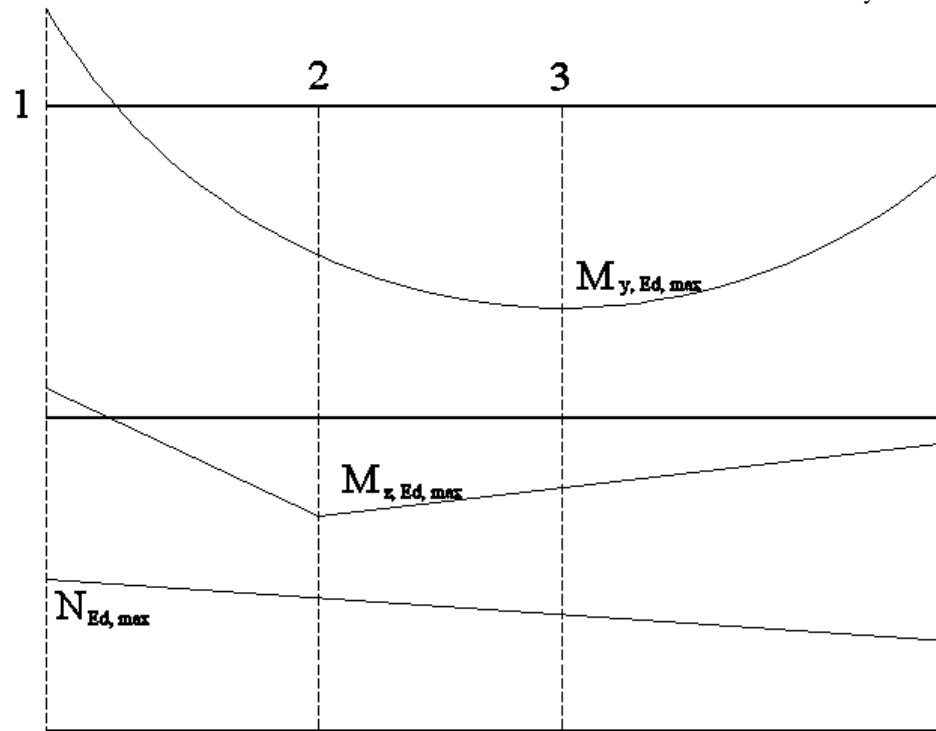
F – charakterystyka geometryczna

$$R = F f_y$$

$$E / R \leq 1,0$$

Elementy i węzły, gdy zagadnienie stateczności nie jest istotne; śruby, nity, sworznie

Rys: Autor



Nośność przekroju = obliczenia na poziomie przekroju; przeprowadzone trzykrotnie: dla punktu 1, 2 i 3.

I lub II klasa przekroju:

$$\left( M_{y, Ed} / M_{N, y, Rd} \right)^\alpha + \left( M_{z, Ed} / M_{N, z, Rd} \right)^\beta \leq 1,0$$

EN 1993-1-1 (6.41)

$V_{Ed} > 0,5 V_{Rd} \rightarrow$  interakcja  $M_{Ed}$  i  $V_{Ed} \rightarrow$  I przeliczenie  $M_{Rd} \rightarrow$  interakcja  $M_{Ed}$  i  $N_{Ed}$   
 $\rightarrow$  II przeliczenie  $M_{Rd}$

Przekrój prostokątny:

$$\alpha = \beta = 1,0$$

$$M_{N, y, Rd} = M_{y, pl, Rd} [ 1 - (N_{Ed} / N_{pl, Rd})^2 ]$$

$$M_{N, z, Rd} = M_{z, pl, Rd} [ 1 - (N_{Ed} / N_{pl, Rd})^2 ]$$

EN 1993-1-1 (6.41)

Dwuteownik bisymetryczny:

$$\alpha = 2 \quad \beta = \max (5n ; 1,0)$$

$$n = N_{Ed} / N_{pl, Rd}$$

$$a = \min [ 0,5 ; (A - 2 b t_f) / A ]$$

	$N_{Ed} \leq \min ( 0,25 N_{pl, Rd} ; 0,5 h_w t_w f_y / \gamma_{M0} )$	$N_{Ed} > \min ( 0,25 N_{pl, Rd} ; 0,5 h_w t_w f_y / \gamma_{M0} )$	
$M_{N, y, Rd}$	$M_{pl, y, Rd}$	$\min [ M_{pl, y, Rd} ; M_{pl, y, Rd} (1 - n) / (1 - 0,5 a) ]$	
	$N_{Ed} \leq h_w t_w f_y / \gamma_{M0}$	$N_{Ed} > h_w t_w f_y / \gamma_{M0}$	
$M_{N, z, Rd}$	$M_{pl, z, Rd}$	$n \leq a$	$n > a$
		$M_{pl, z, Rd}$	$M_{pl, z, Rd} \{ 1 - [(n-a) / (1-a)]^2 \}$

EN 1993-1-1 (6.33) - (6.41)

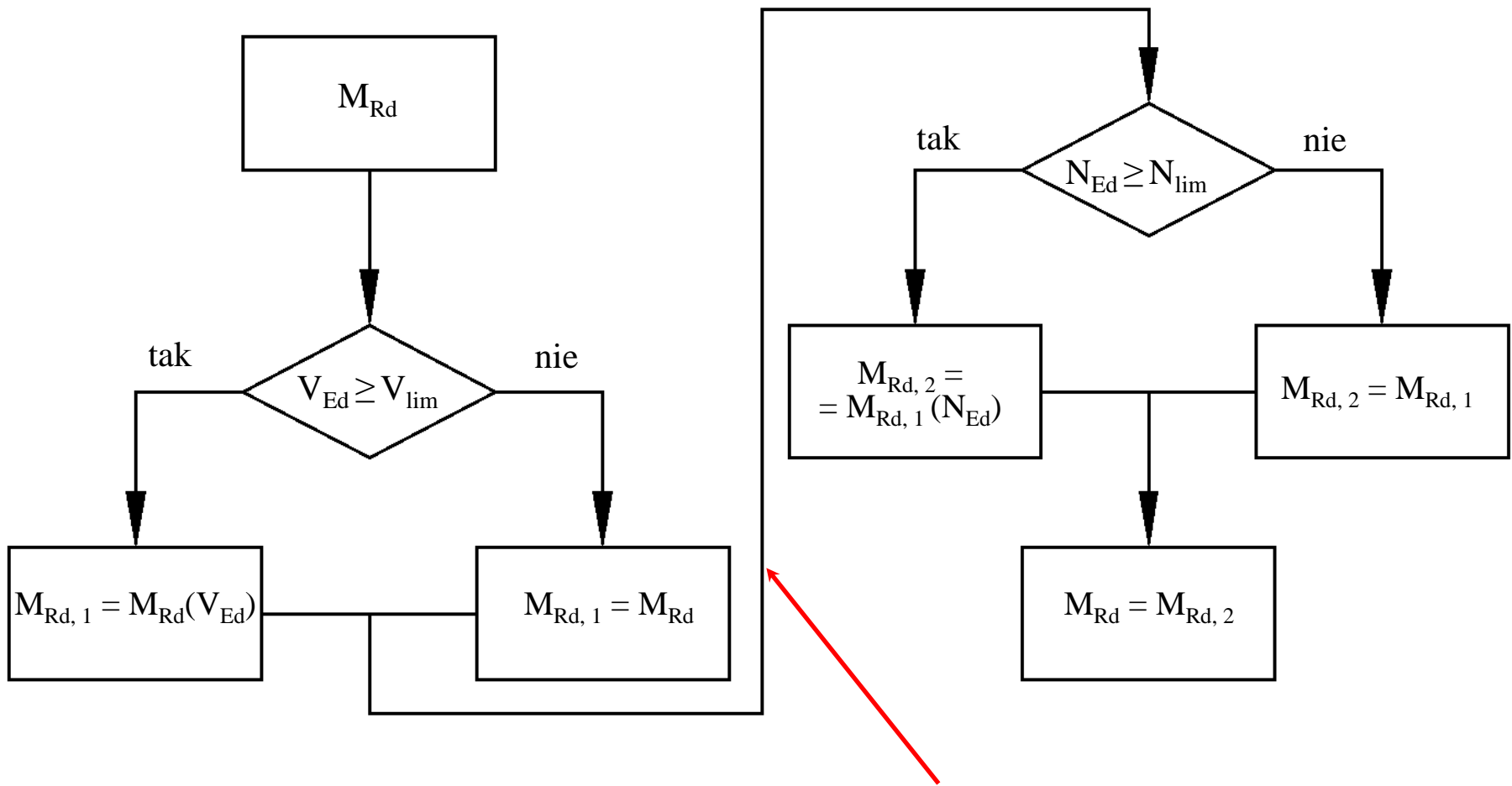
Rury okrągłe i prostokątne gorącowalcowane i zimnogięte oraz spawane przekroje skrzynkowe:

$$M_{N, y, Rd} = \min [ M_{pl, y, Rd} ; M_{pl, y, Rd} (1 - n) / (1 - 0,5 a) ]$$

$$M_{N, z, Rd} = \min [ M_{pl, z, Rd} ; M_{pl, z, Rd} (1 - n) / (1 - 0,5 a_f) ]$$

	Spawane	Prostokątne	Okrągłe
$a_w$	$\min [0,5 ; (A - 2 b t_f) / A ]$	$\min [0,5 ; (A - 2 b t) / A ]$	0,5
$a_f$	$\min [0,5 ; (A - 2 h t_w) / A ]$	$\min [0,5 ; (A - 2 h t) / A ]$	
$\alpha = \beta$	$\min [ 6 ; 1,66 / (1 - 1,13 n^2) ]$		2

EN 1993-1-1 (6.33) - (6.41)



Rys: Autor

Ten fragment nie jest jasno sprecyzowany w Eurokodzie; jego przyjęcie jest po stronie bezpiecznej

III klasa przekroju:

$$N_{Ed} / (A f_y / \gamma_{M0}) + M_{y, Ed} / (W_{y, min} f_y / \gamma_{M0}) + M_{z, Ed} / (W_{z, min} f_y / \gamma_{M0}) \leq 1,0$$

EN 1993-1-1 (6.42)

IV klasa przekroju:

$$N_{Ed} / (A_{eff} f_y / \gamma_{M0}) + (M_{y, Ed} + N_{Ed} e_{Ny}) / (W_{eff, y, min} f_y / \gamma_{M0}) + (M_{z, Ed} + N_{Ed} e_{Nz}) / (W_{eff, z, min} f_y / \gamma_{M0}) \leq 1,0$$

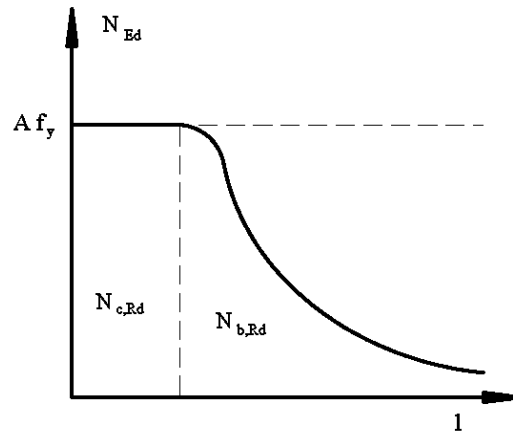
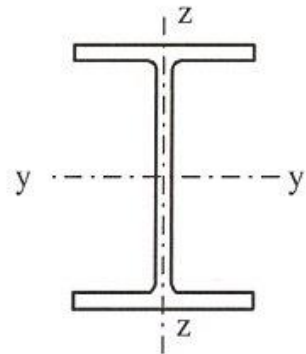
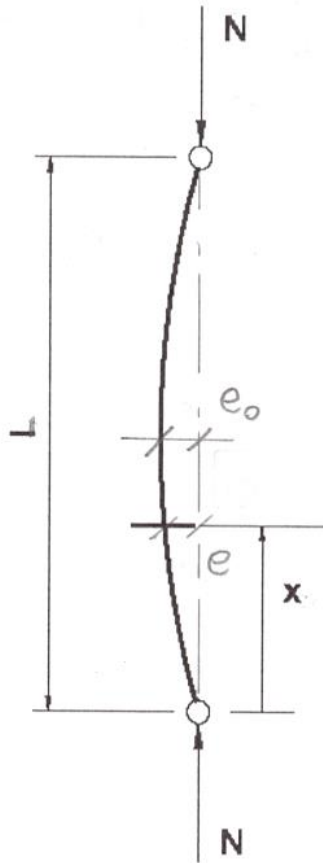
EN 1993-1-1 (6.44)

## Niestateczność

Przypadki proste ( $\rightarrow$ #5)		Interakcje
$N_{Ed,c}$ :	$M_{Ed}$ :	$N_{Ed,c} + M_{Ed}$ :
wyboczenie $\chi_y$	zwichrzenie	wyboczenie $\chi_y +$ zwichrzenie $\chi_{LT}$
wyboczenie $\chi_z$	$\chi_{LT}$	wyboczenie $\chi_z +$ zwichrzenie $\chi_{LT}$
skrętnie $\chi_T$		skrętnie $\chi_T +$ zwichrzenie $\chi_{LT}$
skrętno-giętne $\chi_{zT}$		skrętno-giętne $\chi_{zT} +$ zwichrzenie $\chi_{LT}$

Obliczenia prowadzone są na poziomie elementu

Na poziomie elementu:



Rys: Autor

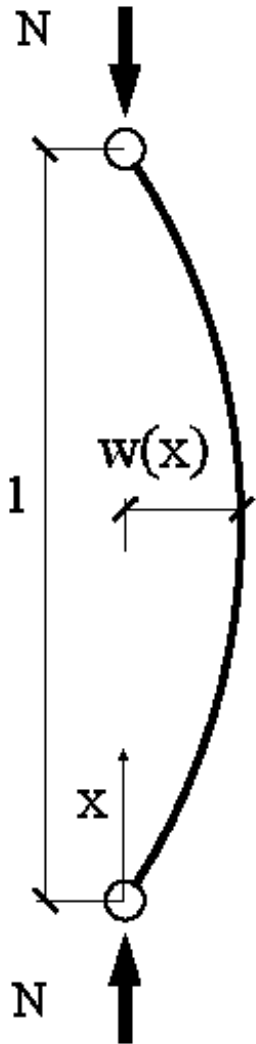
$F$  – charakterystyka geometryczna

$\chi$  – współczynnik stateczności (zależy od długości elementu i sposobu podparcia)

$$R = \chi F f_y$$

$$E / R \leq 1,0$$

Węzły i elementy w warunkach utraty stateczności



## Wyboczenie giętkie

Wzory zgodnie z Wytrzymałością materiałów:

$$M(x) = N w(x)$$

$$d[w(x)]^2 / dx^2 = -M(x) / EJ \rightarrow M(x) = -w''(x) E J$$

$$-w''(x) E J = N w(x)$$

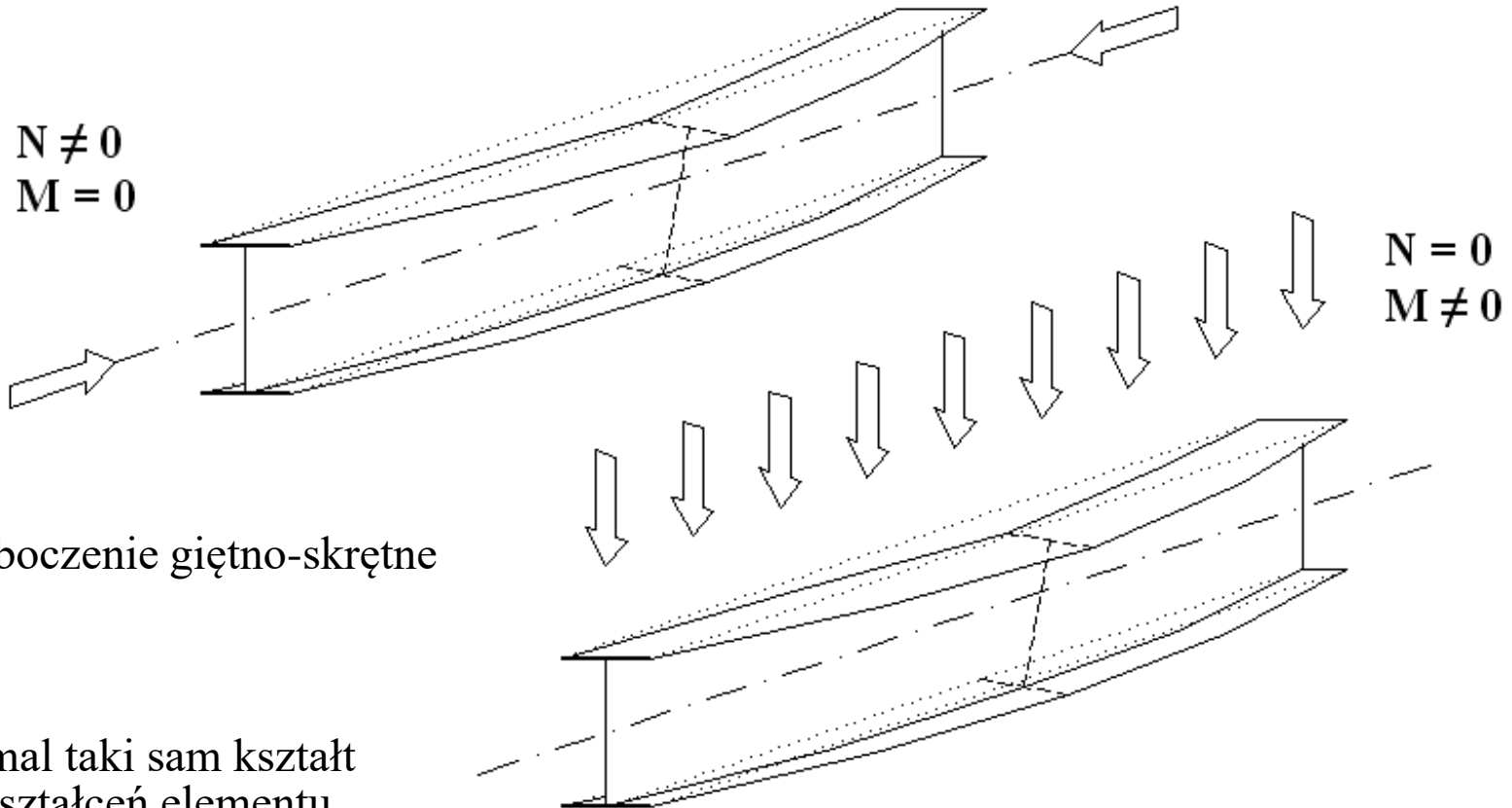
$$w''(x) = -k^2 w(x)$$

$$k = \sqrt{N / EJ}$$

Rys: Autor

# Zwężenie

Wyboczenie giętno-skrętne i zwężenie - wygląd  
odkształceń elementu



Wyboczenie giętno-skrętne

Niemal taki sam kształt  
odkształceń elementu,  
aczkolwiek zupełnie inne  
powody

Zwężenie

Zachodzi wielka różnica między obliczeniami niestateczności w przypadkach prostych i interakcjami.

W przypadkach prostych niestateczność jest zawsze bardziej niebezpieczna od przekroczenia nośności:

$$R_{\text{instability}} = R \chi$$
$$\chi \leq 1,0 \rightarrow R_{\text{instability}} \leq R$$

Z tego powodu nie ma potrzeby sprawdzania zarówno nośności jak i niestateczności:

$$E / R \leq 1,0$$

$$E / R_{\text{instability}} \leq 1,0$$

Drugi przypadek jest zawsze bliższy 1,0.

Dla przypadków prostych sprawdzamy tylko  $E / R_{\text{instability}} \leq 1,0$ .

W przypadku interakcji, zwichrzenie i wyboczenie nakładając się na siebie, mogą się wzajemnie wzmacniać lub osłabiać. Nie da się z góry przewidzieć, który przypadek będzie bardziej niekorzystny:

$$\text{złożona postać utraty stateczności} \quad E / R_{\text{instability}} \leq 1,0$$

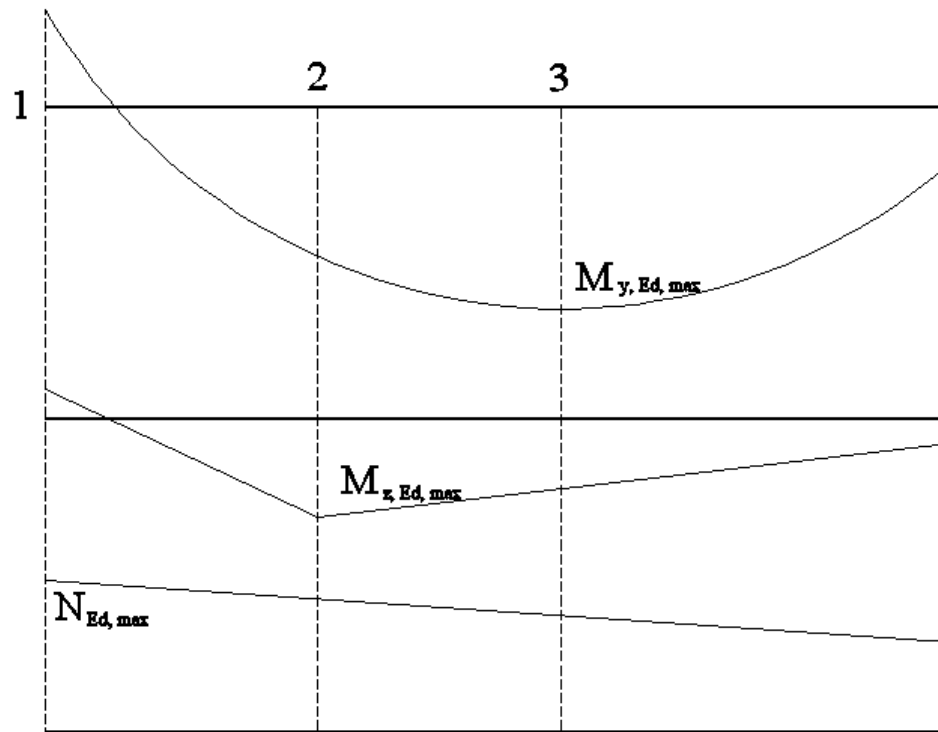
czy

$$\text{przekroczenie nośności} \quad E / R \leq 1,0$$

W przypadku interakcji muszą być wykonane zarówno obliczenia nośności jak i stateczności.

I, II, III klasa przekroju – ta sama geometria przekroju dla ustalenia nośności i niestateczności

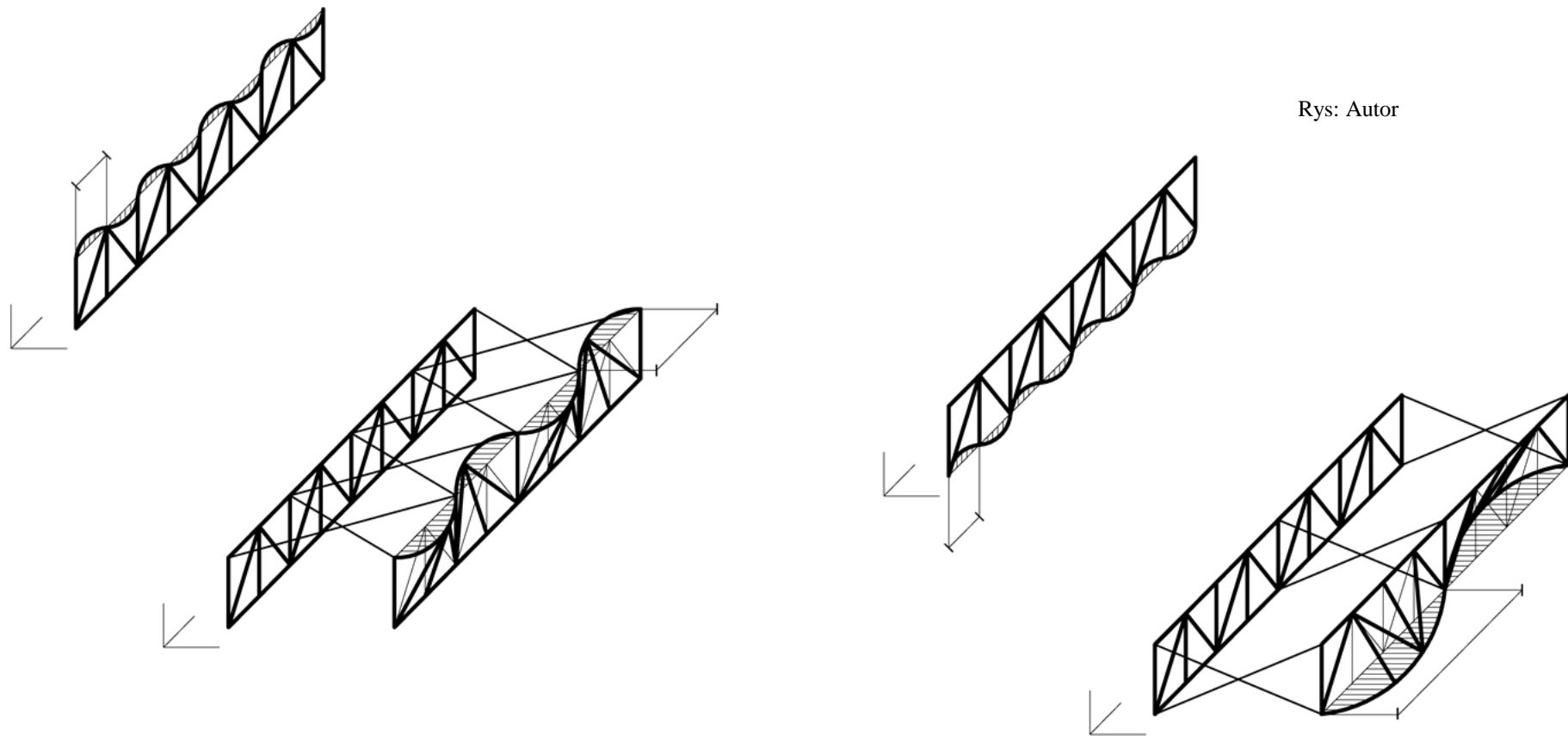
IV klasa przekroju – przekrój efektywny dla nośności, całkowity dla niestateczności



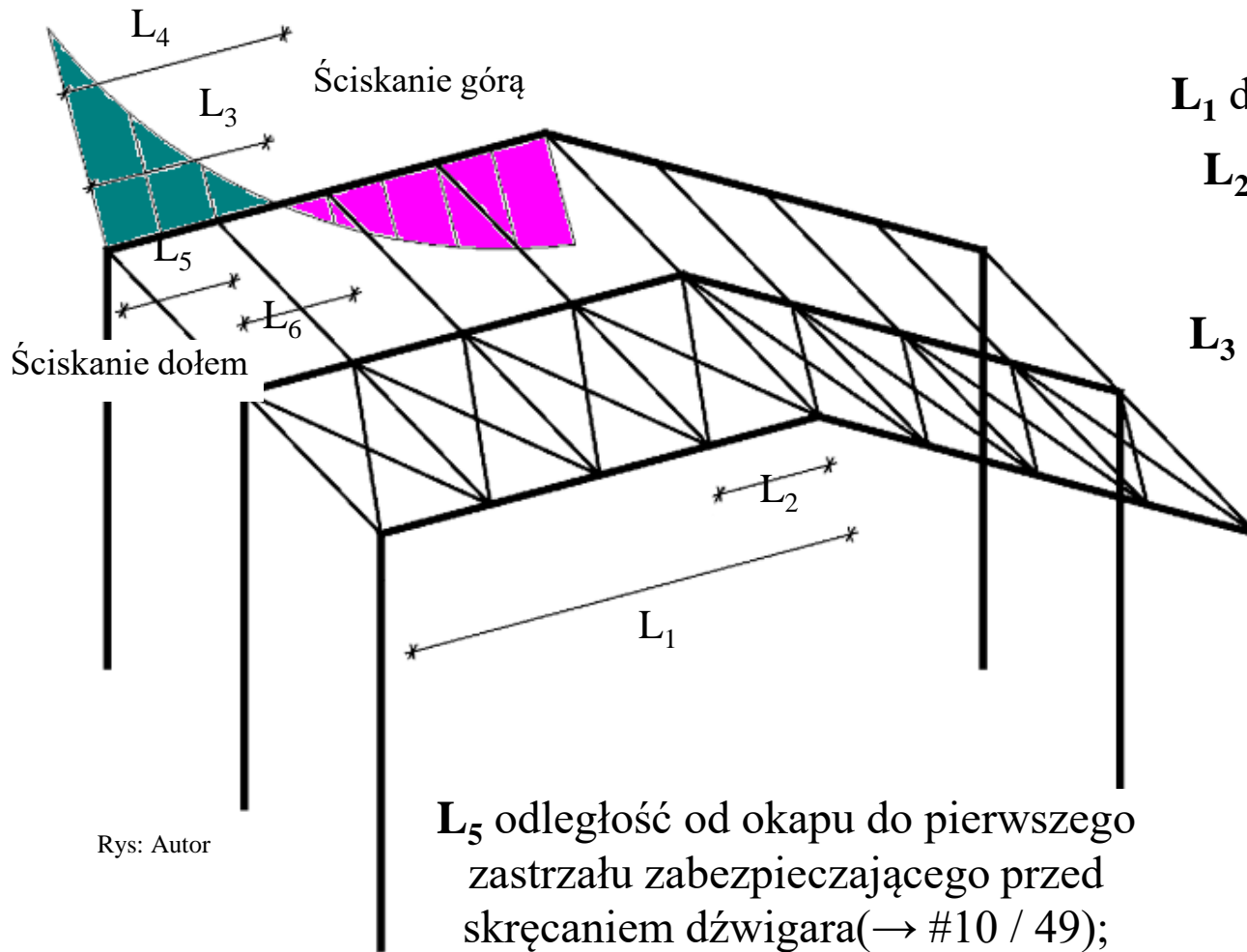
Nośność przekroju = obliczenia na poziomie przekroju; przeprowadzone trzykrotnie: dla punktu 1, 2 i 3.

Stateczność: jedno sprawdzenie dla maksymalnych wartości  $_{Ed}$ ,  $M_{y, Ed}$ ,  $M_{z, Ed}$  nawet jeśli leżą w różnych przekrojach.

Długość wyboczeniowa jest podstawowym zagadnieniem przy analizie utraty stateczności. Przykładowo, dla kratownicy zależy ona od rozmieszczenia węzłów i stężeń.



Ustalenie długości wyboczeniowej dla słupów jest znacznie bardziej skomplikowane.



$L_1$  długość całkowita;

$L_2$  rozstaw stężeń;

$L_3$  długość odcinka ze ścisnącą  
półką dolną;

$L_4$  odległość od okapu do  
pierwszej płatwii w  
obszarze ścisanej półki  
górnej;

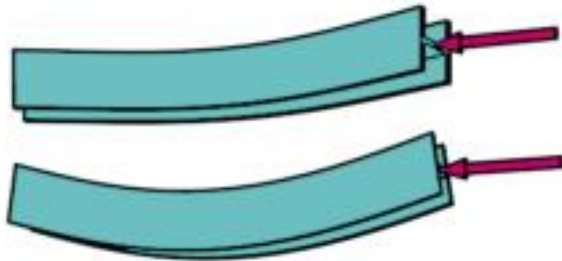
$L_5$  odległość od okapu do pierwszego  
zastrzału zabezpieczającego przed  
skręcaniem dźwigara(→ #10 / 49);

$L_6$  odległość między dwoma najbliższymi zastrzałami przeciw-skręcaniowymi (→ #10 / 49);

Rys: Autor

Rodzaj niestateczności globalnej		Długość krytyczna
Wyboczenie	w płaszczyźnie ramy	$L_1$
	prostopadle do płaszczyzny ramy	$L_2$
Zwichrzenie	jeśli zastosowano zastrzały przeciw-skręciowe ( $\rightarrow$ #10 / 49)	$\max(L_5 ; L_6)$
	gdy <b>brak</b> zastrzałów ( $\rightarrow$ #10 / 49)	$\max(L_3 ; L_4)$

Wyboczenie



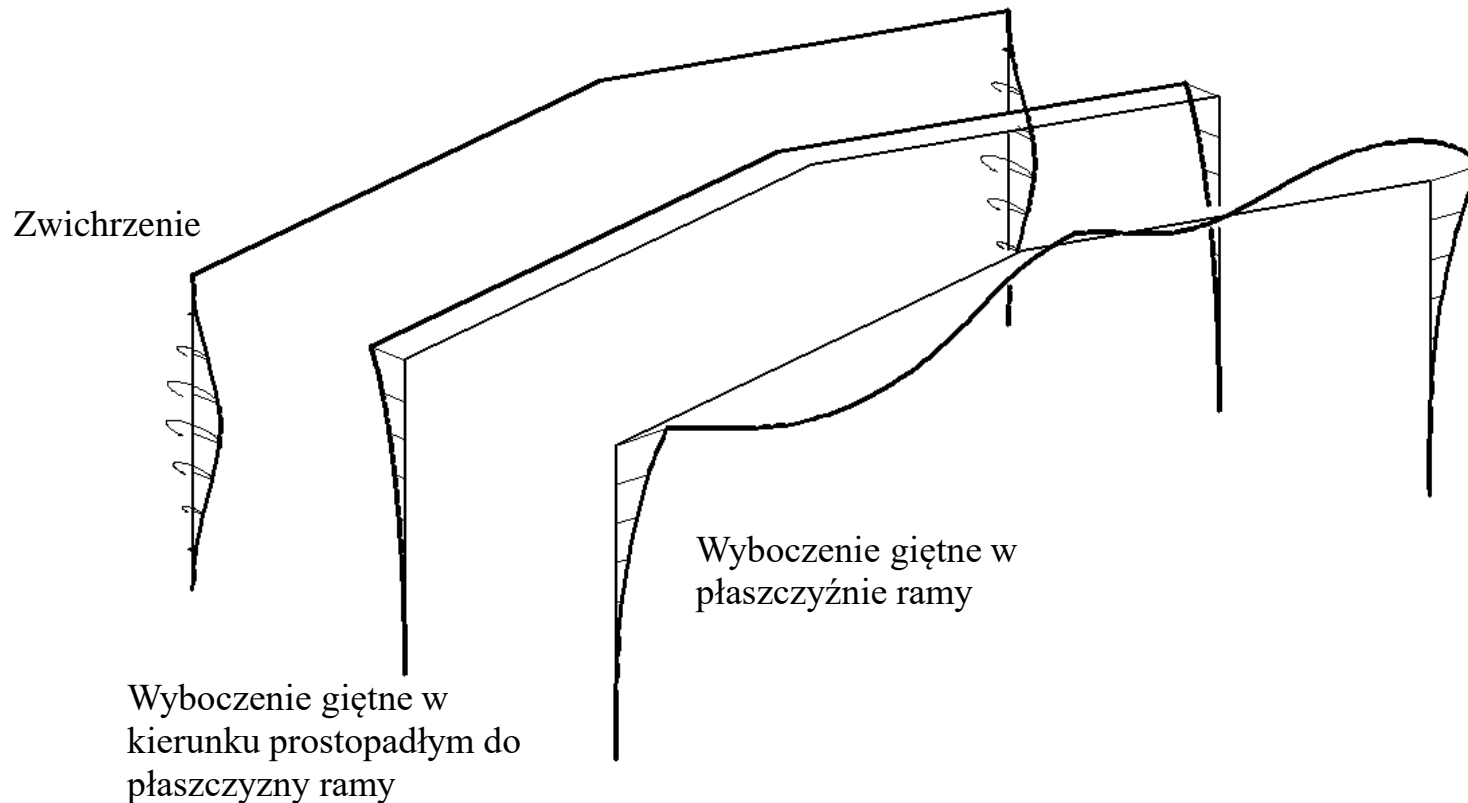
Zwichrzenie



Rys: calresource.com

$\rightarrow$  #10 / 14

Rozważyć trzeba trzy podstawowe formy utraty stateczności przez słup: zwichrzenie, wyboczenie giętnie prostopadłe do płaszczyzny rami i wyboczenie giętnie w płaszczyźnie rami. Jeżeli słup **nie jest** wykonany z dwuteownika gorącowalcowanego, dodatkowo należy wziąć pod uwagę wyboczenie skrętne i skrętno-giętnie.



Rys: Autor

Jest możliwe, że dla każdej z tych postaci istnieje inna długość wyboczeniowa.

Zgodnie z #t / 33 należy rozpatrzyć kilka rodzajów niestateczności:

Niestateczność	Belka gorącowalcowana	Belka spawana
Wyboczenie giętne w płaszczyźnie ramy	#t / 35 – 36	
Wyboczenie giętne poza płaszczyznę ramy	#t / 37 – 71	
Wyboczenie skrętne		#t / 72 – 76
Wyboczenie skrętno-giętne		
Zwichrzenie		

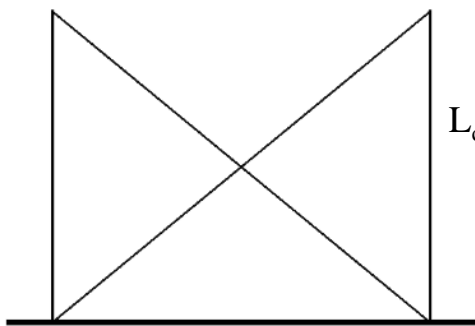
## Wyboczenie giętnie poza płaszczyznę

Długość wyboczeniowa zależy od rozmieszczenia stężeń.



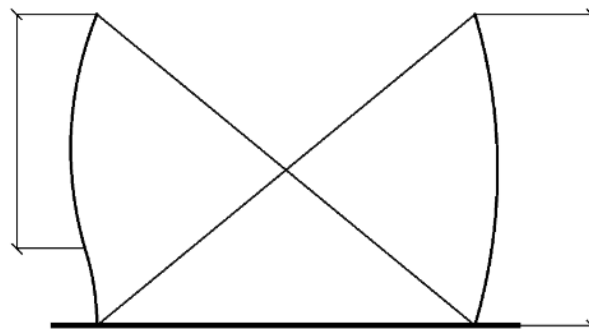
Rys: ed808.com

Rys: dreamstime.com



$$L_{cr} < L_0$$

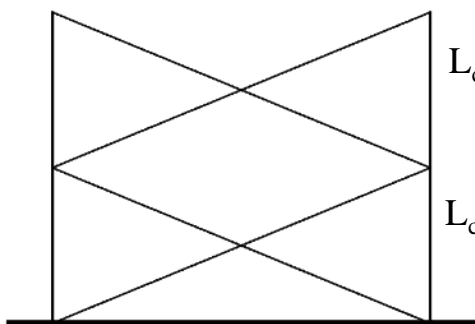
Podpora sztywna



$$L_{cr} = L_0$$

Podpora przegubowa

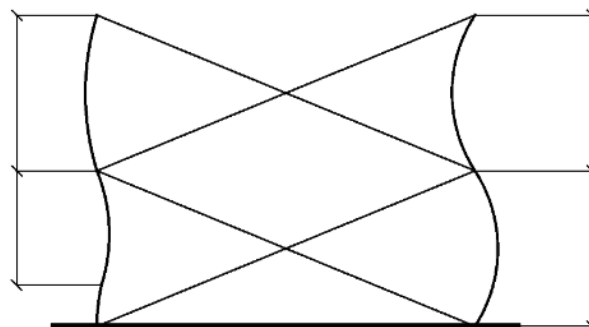
Rys: Autor



$$L_{cr} = L_0$$

$$L_{cr} < L_0$$

Podpora sztywna



$$L_{cr} = L_0$$

$$L_{cr} = L_0$$

Podpora przegubowa

Długość krytyczna przy wyboczeniu poza płaszczyznę ramy jest zawsze nie większa niż rozstaw stężeń

# Wyboczenie w płaszczyźnie

Wyboczenie giętne w płaszczyźnie ramy może być analizowane jedną z trzech metod:

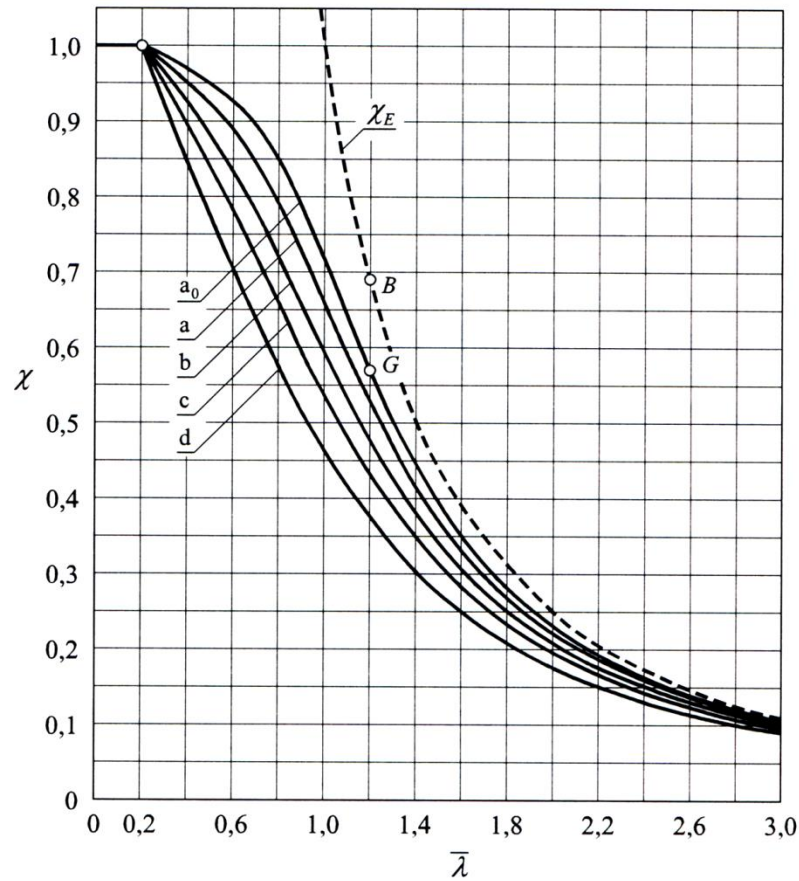
- EN 1993-1-1 5.2.2. (3.a), (7.a) (Procedura „A”);
- to EN 1993-1-1 5.2.2. (3.b), (7.b) (Procedura „B”);
- EN 1993-1-1 5.2.2. (3.c), (7.c) (Procedura „C”).

„A”, „B”, „C” – „copyright”, nazwy użyte wyłącznie na potrzeby niniejszego wykładu.

W teorii możemy policzyć nośność krytyczną jako siłę krytyczną

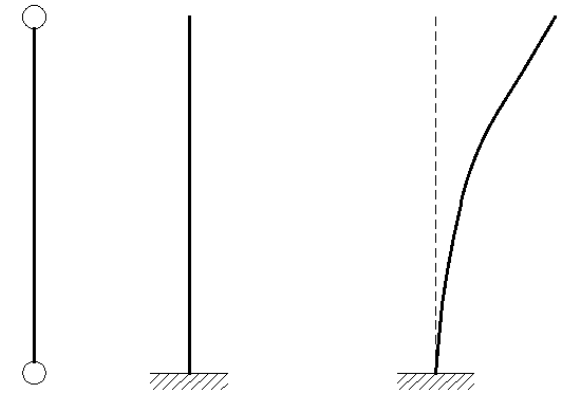
$$\pi^2 EJ / L_{cr}^2$$

W rzeczywistości musimy brać pod uwagę fakt, że elementy od samego początku nie są idealnie proste i idealnie w osi.



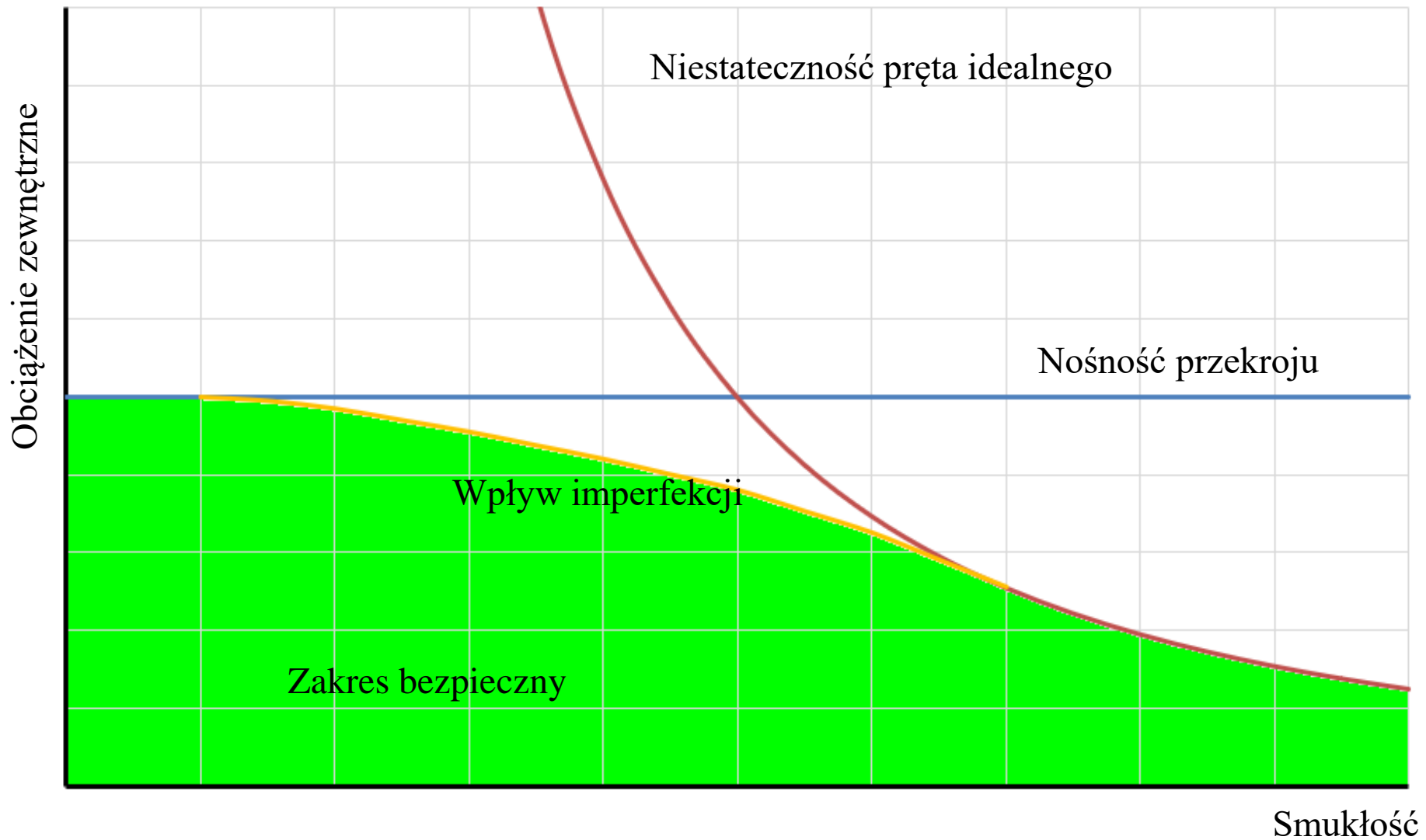
Rys: Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych, K. Rykaluk, DWE Wrocław 2012

Rys: Autor



W teorii wpływ niestateczności pojawia się dopiero dla  $\lambda > 1,0$ .

W rzeczywistości imperfekcje ułatwiają utratę stateczności, zatem należy brać ją pod uwagę już dla  $\lambda > 0,2$ .

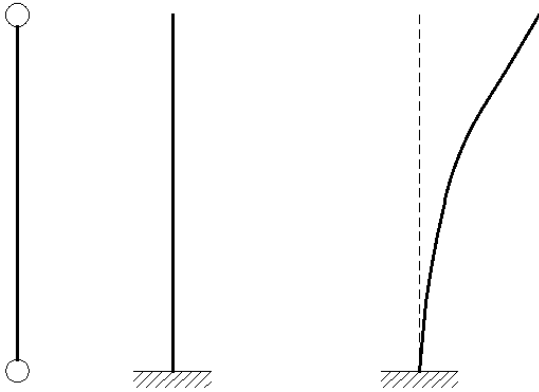


Zasada ogólna opisująca wyboczenie i zwichrzenie pręta

Według EN 1993-1-1, w przypadku nie-prostego nie-pionowego słupa można brać pod uwagę następujące zjawiska:

- uwzględnienie dodatkowych momentów zginających wynikających ze wstępnych deformacji słupa (Procedura „A”)
- dokładne ustalenie współczynników długości wyboczeniowej takiego słupa (Procedura „C”: wzory uproszczone, tablice lub analiza numeryczna);
  - częściowo jedno i częściowo drugie (Procedura „B”).

Są dwie grupy przyczyn nieidealności pręta:



Rys: Autor

- imperfekcje wygięciowe (wygięcie wstępne);
- imperfekcje przechyłowe (wstępny przechył);
- efekty II rzędu (przechył eksploatacyjny).

Analizując utratę stateczności słupa (interakcja wyboczenia giętnego i zwichrzenia), należy uwzględnić wpływ krzywizny i nie-pionowości na wartość momentów zginających i na długości wyboczeniowe. W związku z tym imperfekcje można rozpatrywać jednocześnie na dwa sposoby:

- w określeniu współczynnika utraty stateczności - przez parametr  $\alpha$ ;
- w określeniu wartości momentu zginającego – przez obciążenia zastępcze.

	Procedura "A"	Procedura "B"	Procedura "C"
Obciążenia	<ul style="list-style-type: none"> <li>• „zwykłe”</li> <li>• od efektów II rzędu</li> <li>• od imperfekcji przechyłowych</li> <li>• od imperfekcji wygięciowych</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• „zwykłe”</li> <li>• od imperfekcji przechyłowych</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• „zwykłe”</li> </ul>
Obliczenia	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nośność</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nośność</li> <li>• <math>\mu_y = 1,0</math></li> <li>• Stateczność</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Nośność</li> <li>• Wartość <math>\mu_y</math></li> <li>• Stateczność</li> </ul>
Uwagi	Duży nakład pracy przy zestawianiu obciążeń	Średni nakład pracy przy zestawianiu obciążeń, średni przy liczeniu $\mu_y$ i stateczności	Mały nakład pracy przy zestawianiu obciążeń, duży przy liczeniu $\mu_y$ i stateczności

Wybór metody - indywidualna decyzja projektanta. Dla ram wrażliwych na efekty II rzędu zalecana jest procedura „A”.

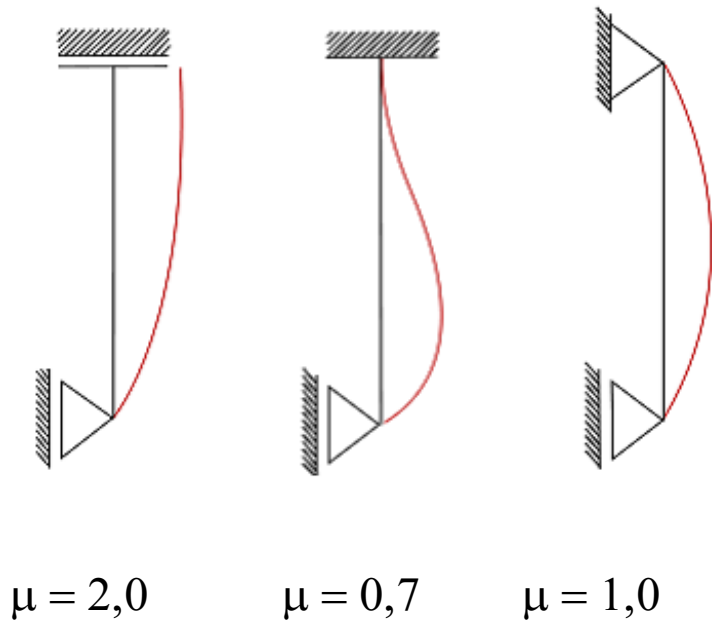
Obliczenie  $\mu_y$  w metodzie „C” jest skomplikowane. Najpierw trzeba przeanalizować postać utraty stateczności. Ogólnie rzecz biorąc, wszystkie konstrukcje można w związku z tym podzielić na dwie kategorie:

- ramy przesuwne
- ramy nieprzesuwne

Ramy przesuwne można utożsamić z ramami niestężonymi; nieprzesuwne ze stężonymi.

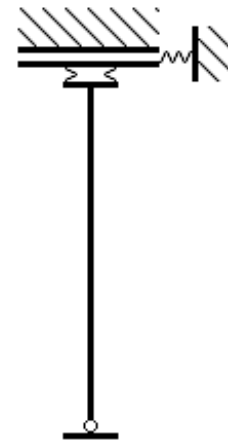
Częsty błąd: wyboczenie słupa ramy jest traktowane jak wyboczenie pojedynczego, izolowanego pręta.

Rys: wikipedia



W ramie mamy podparcie sprężyste na obrót i przemieszczenie poziome. Podpory sztywne są możliwe tylko dla ryglu o nieskończonej sztywności.

Rys: Autor

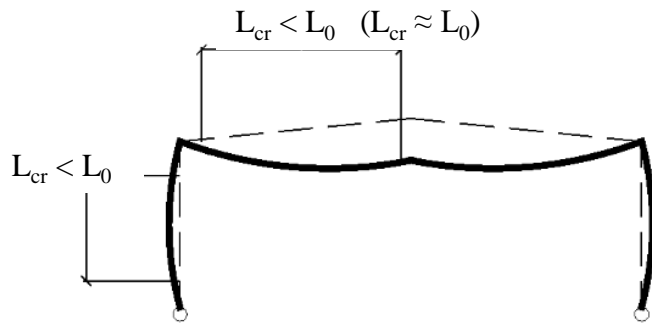


Z powodu podparcia sprężystego w kierunku poziomym bardzo często  $\mu_y \gg 2,0$

Rama stężona ↔ rama niestężona,  
Pierwsza postać utraty stateczności

Rama stężona: przemieszczenia poziome są zanedbywalnie małe.

Małe  
przemieszczenia  
poziome

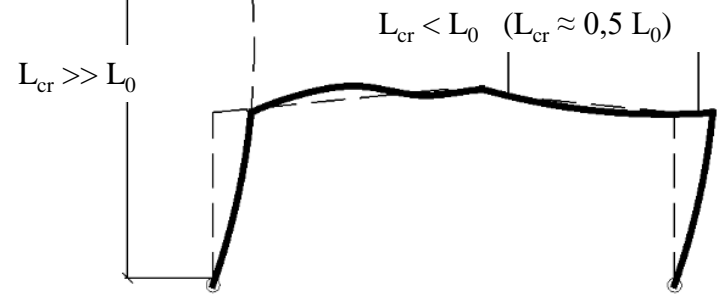


Rama stężona =  
nieprzesuwana

$$\mu_{y, \text{column}} \leq 1,0$$

$$\mu = L_{cr} / L_0$$

Duże  
przemieszczenia  
poziome

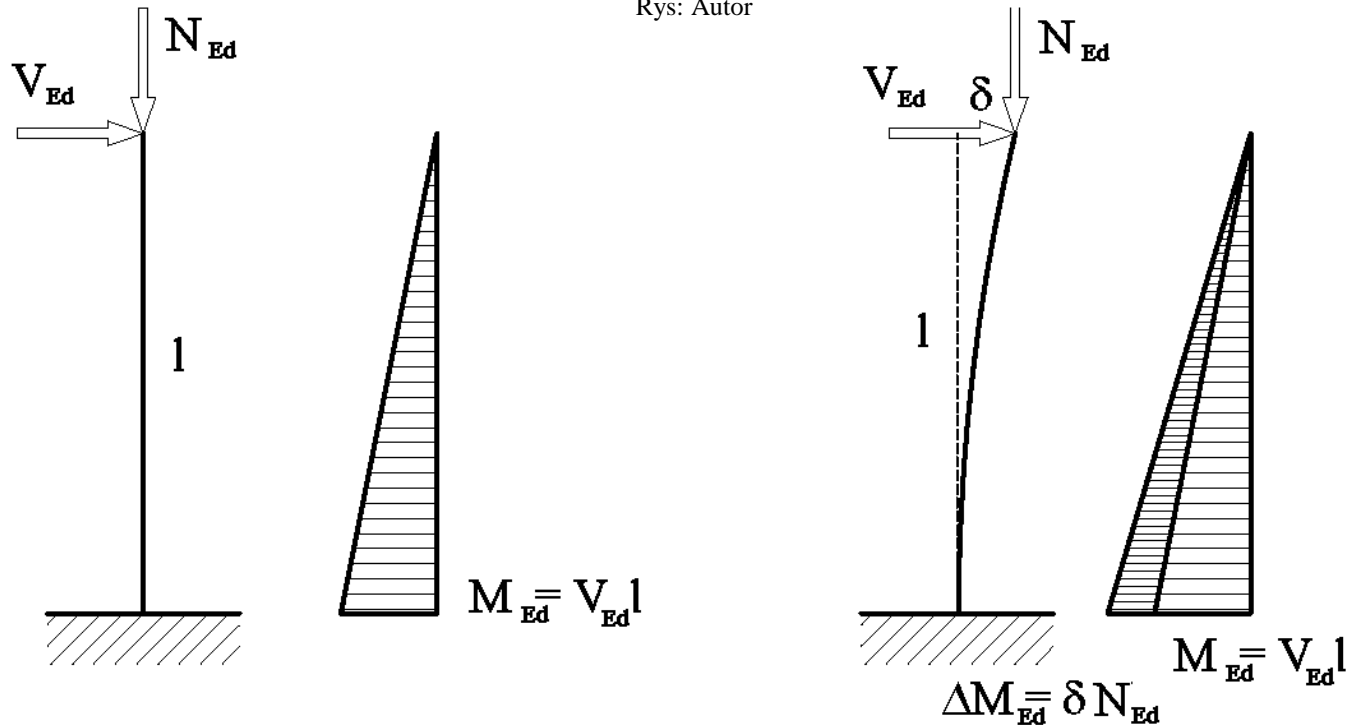


Rama niestężona =  
przesuwana

$$\mu_{y, \text{column}} \geq 1,0$$

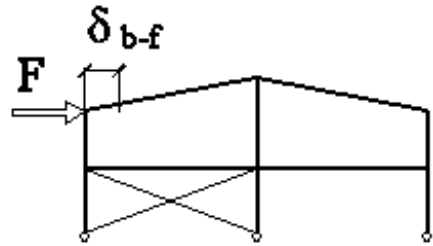
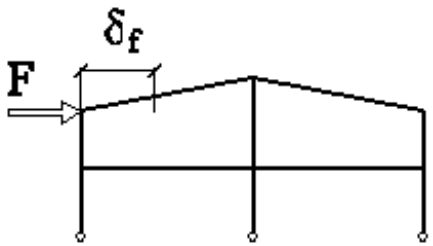
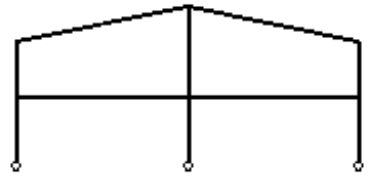
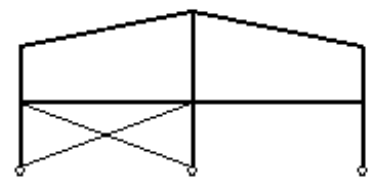
Rys: Autor

Dla wiotkich konstrukcji pojawiają się dodatkowe momenty zginające, związane z deformacjami konstrukcji



Jako efekt zastępczy wprowadza się współczynnik zwiększający obciążenia poziome:  $V_{Ed}^* = V_{Ed} \alpha^*$

Stężenie ścian  
w płaszczyźnie ramy



$$\delta_f / \delta_{b-f} \leq 5$$



Rama niestężona

$$\delta_f / \delta_{b-f} > 5$$



Rama stężona - analiza II rzędu nie jest konieczna

Analiza II rzędu

→ wykład #13

Rys: Autor

Kiedy musimy odwołać się do analizy II rzędu (PN B 03200)

Rama niestężona:

$$\alpha_{cr} \approx (H_{Ed} h) / (V_{Ed} \delta_{H,Ed})$$

$\alpha_{cr} = F_{cr} / F_{Ed}$		
$\alpha_{cr} > 10$	$10 \geq \alpha_{cr} \geq 3$	$\alpha_{cr} < 3$
Nie trzeba uwzględniać	Analiza uproszczona	Analiza zaawansowana

$$Q_{Ed}^* = Q_{Ed} \alpha^*$$

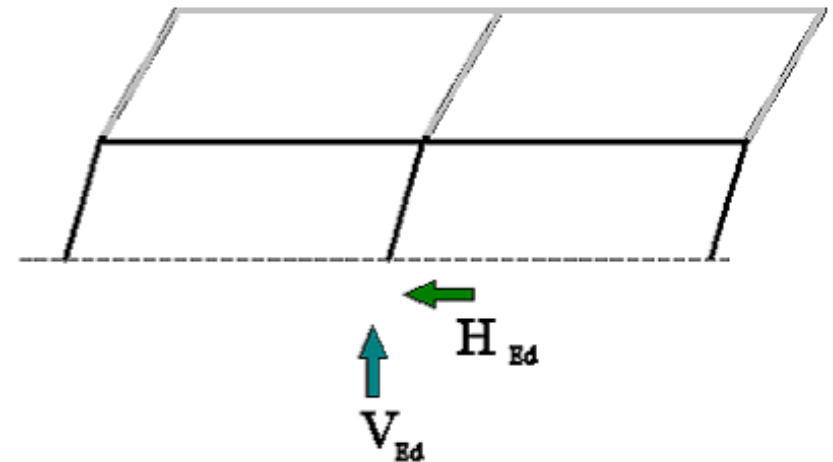
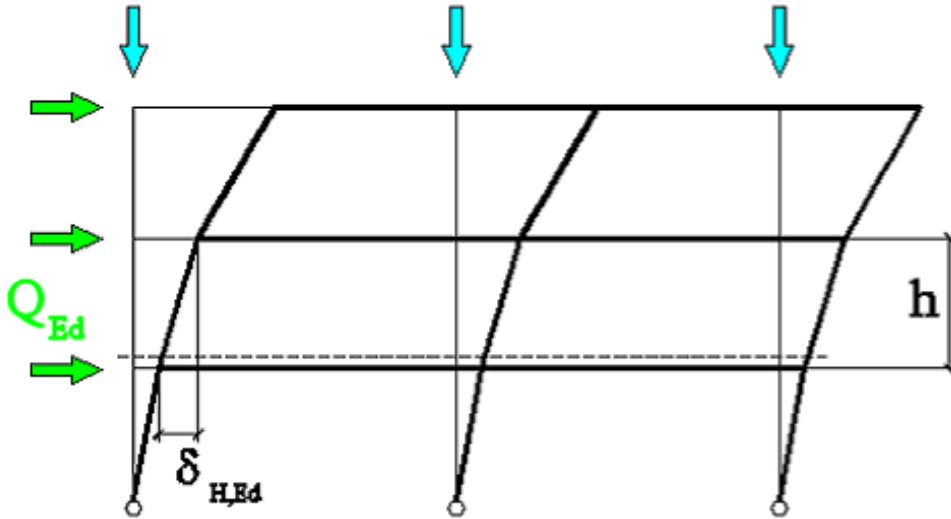
$$\alpha^* = 1 / (1 - 1 / \alpha_{cr})$$

$Q_{Ed}$ ,  $H_{Ed}$ ,  $V_{Ed}$  – tylko dla konkretnego rozpatrywanego piętra

EN 1993-1-1 (5.1), (5.2), (5.4)

EN 1993-1-1 5.2.1.(3),  
EN 1991-1-1 5.2.2.(5)B

Oczywiście,  $\alpha_{cr}$  może też być policzone przez programy komputerowe



Rys: Autor

$\alpha_{cr}$	$\alpha^*$
20	1,053
15	1,071
10	1,111
7	1,167
5	1,250
4	1,333
3	1,500
2	2,000
1	$\rightarrow \infty$

$\alpha_{cr}$  wzrasta gdy:

siła krytyczna jest wielokrotnie większa od obciążenia  
lub  
przemieszczenia poziome i siły poziome mają małą wartość.

Uproszczone obliczenia - statyka liniowa z uwzględnieniem współczynnika zwiększającego  $\alpha^*$  dla wszystkich obciążeń poziomych.

Analiza zaawansowana - statyka nieliniowa (program komputerowy) bez współczynnika zwiększającego  $\alpha^*$ .

Oczywiście,  $\alpha_{cr}$  może być wyliczone przez program do obliczeń statycznych

$$\alpha_{cr} = F_{cr} / F_{Ed} \rightarrow F_{cr} = \alpha_{cr} F_{Ed}$$

Bazując na wartości  $F_{cr}$ , można analizować stateczność słupów.

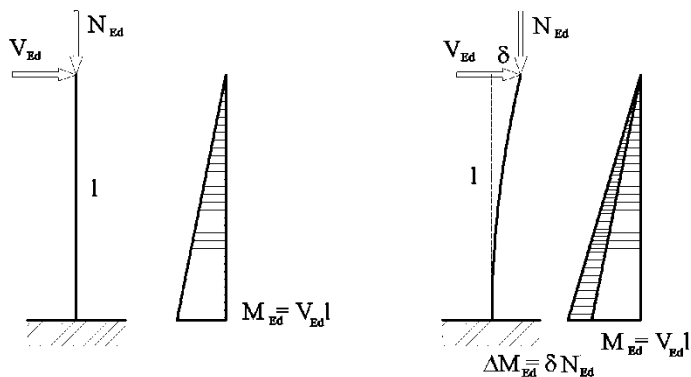
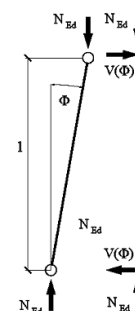
Analiza imperfekcji (przechyłowych i wygięciowych) jest ważna dla metod "A" i "B".

Częstym błędem jest utożsamianie imperfekcji przechyłowych i efektów II rzędu. W obu przypadkach uwzględnia się przechylenie ramy, ale są to dwa zupełnie różne zjawiska.

Imperfekcja przechyłowa: deformacja zastępcza (równoważna zastępczemu obciążeniu) dla wielu różnego typu imperfekcji geometrycznych ( $\rightarrow$  #6).

Imperfekcje zawsze istnieją w rzeczywistych konstrukcjach.

Rys: Autor

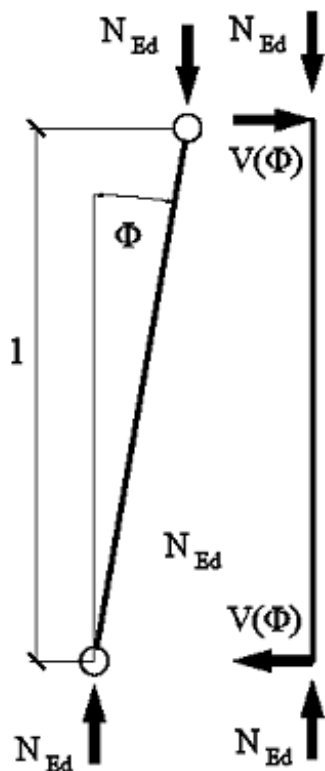


Rys: Autor

Analiza II rzędu: analiza podatności konstrukcji na duże przemieszczenia poziome pod wpływem poziomych obciążeń. Deformacje takie powodują powstanie dodatkowych sił przekrojowych (od sił pionowych na mimośrodach). Analiza taka jest prowadzona tylko dla konstrukcji podatnych (maszty, wieże, niektóre ramy).

Analiza II rzędu ma różne znaczenie dla różnych procedur:

Procedura	Znaczenie analizy II rzędu	
a		Ustalenie dodatkowego mnożnika $\alpha^*$ dla obciążeń poziomych: <ul style="list-style-type: none"> <li>• numeryczna: w programie numerycznym umożliwiającym analizę w zakresie dużych przemieszczeń;</li> <li>• uproszczona – według wzoru <math>\rightarrow \#t / 48</math></li> </ul>
b	Brak	
c	Rozstrzygnięcie, czy rama jest przesuwna czy nieprzesuwna: różne wielkości długości wyboczeniowej ( $\rightarrow \#t / 45$ )	



Rys: Autor

$$\Phi = \Phi_0 \alpha_h \alpha_m$$

$$\Phi_0 = 1 / 200$$

$$\alpha_h = \max \{ 2 / 3 ; \min [ (2 / \sqrt{h}) ; 1,0] \}$$

$h$  – wysokość kondygnacji [m]

$$\alpha_m = \sqrt{[ 0,5 (1 + 1 / m)]}$$

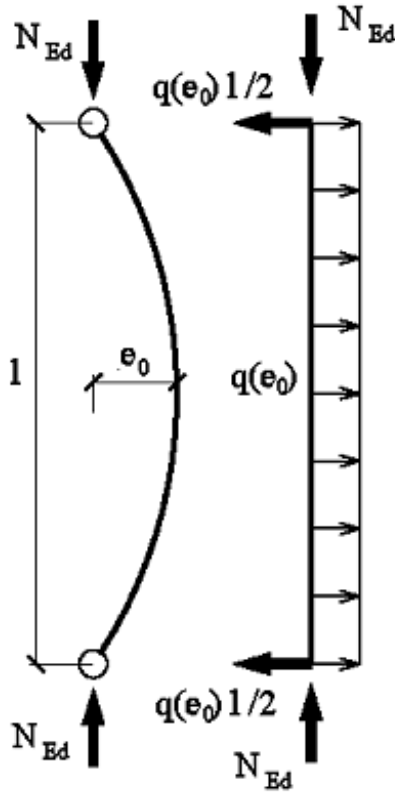
$m$  – ilość kolumn (elementów) biorąc pod uwagę tylko te z nich, które przenoszą siłę osiową  $N_{Ed}$  nie mniejszą niż 50% średniej z wszystkich rozpatrywanych.

$N_{Ed}$  – siła osiowa w słupie lub elemencie stężanym (pasie kratownicy itp).

$$V(\Phi) l = M = N_{Ed} l \Phi$$

$$V(\Phi) = N_{Ed} \Phi$$

$e_0$  zależy od krzywej wybocheniowej (→ Lec #5)



Rys: Autor

Krzywa wybocheniowa	Analiza sprężysta	Analiza plastyczna
$a_0$	1 / 350	1 / 300
a	1 / 300	1 / 250
b	1 / 250	1 / 200
c	1 / 200	1 / 150
d	1 / 150	1 / 100

$N_{Ed}$  – siła osiowa w słupie lub elemencie stężonym (pasie kratownicy itp).

$$N_{Ed} e_0 = M = q(e_0) l^2 / 8$$

$$q(e_0) = 8 N_{Ed} e_0 / l^2$$

Imperfekcja:	Może być pominięta gdy:
Przechyłowa	$H_{ed} \geq 0,15 V_{Ed}$
Wygięciowa	$(L / i) (1 / \lambda_1) \leq 0,5 \sqrt{(A f_y / N_{Ed})}$ $\lambda_1 = 93,9 \varepsilon$

EN 1993-1-1 (5.7)

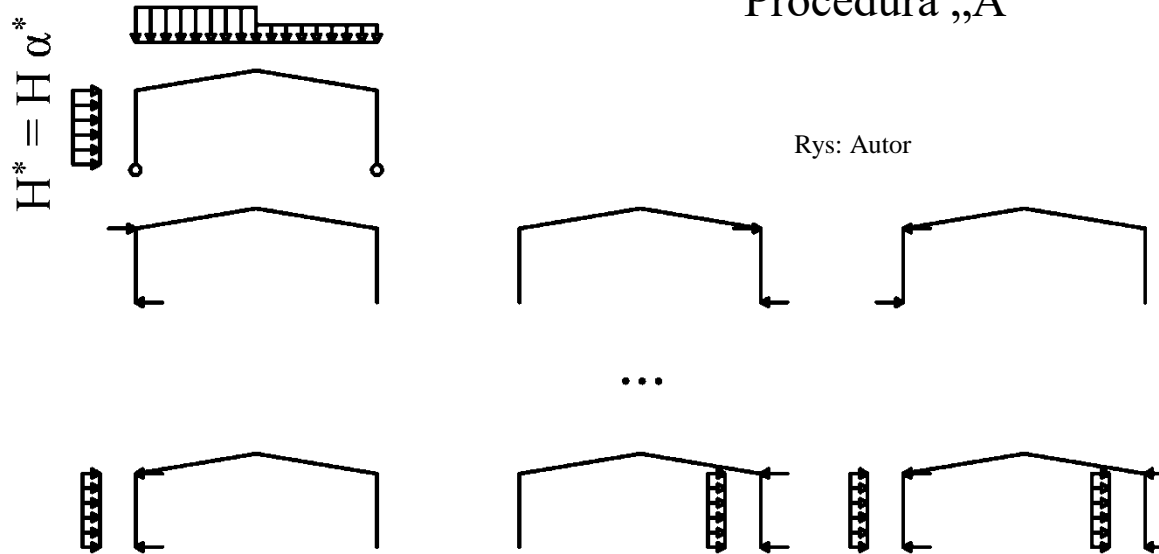
EN 1993-1-1 (5.8)

Jeśli imperfekcje mogą być pominięte, lepiej użyć procedury „C”

EN 1993-1-1 N.A. 9 – ramy parterowe mogą być potraktowane jak ramy stężone bez imperfekcji.

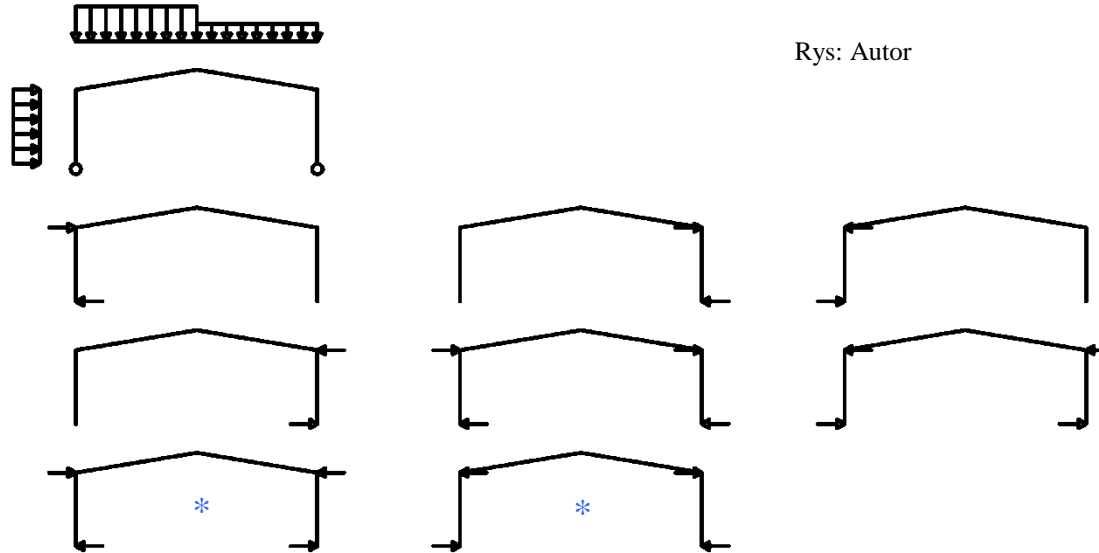
Oczywiście, bezpieczniej jest projektować je jak ramy niestężone z imperfekcjami.

## Procedura „A”



- „Normalne” obciążenia przemnożone przez parametr efektów II rzędu  $\alpha^*$ ;
- Różne kombinacje dla imperfekcji przechyłowych (8 dla powyższej ramy);
- Różne kombinacje dla imperfekcji wygięciowych (8 dla powyższej ramy);
- Równoczesne zastosowanie przeciwnych imperfekcji nie jest zalecane;
- Równoczesne zastosowanie imperfekcji wygięciowych i przechyłowych nie jest zalecane;

## Procedura "B"



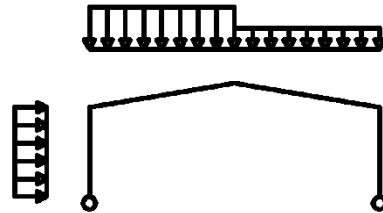
Rys: Autor

Różne kombinacje dla imperfekcji przechyłowych (8 dla powyższej ramy);

Równoczesne zastosowanie przeciwnych imperfekcji nie jest zalecane.

## Procedura „C”


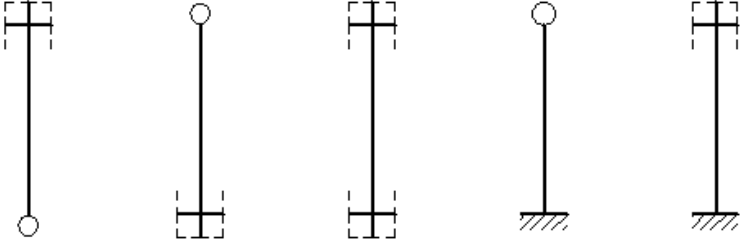
Rys: Autor



„Zwykłe” obciążenia.

# Wartość $\mu$ dla różnego typu słupów

Rys: Autor

Rodzaj elementu	Słup		Belka	
				
Obliczenia	$\mu = 1,0$	Procedura "A" – bez analizy stateczności	$\mu = 1,0$	
		Procedura "B": $\mu = 1,0$		
		Procedura "C": $\mu = ?$		

Ustalenie wartości  $\alpha^*$  w procedurze „A” jest możliwe na trzy sposoby:

- obliczenia geometrycznie nieliniowe (zakres dużych przemieszczeń) → #t / 71
  - analiza numeryczna dla  $\alpha_{cr}$  → #t / 48 - 49
  - wzory uproszczone dla  $\alpha_{cr}$  → #t / 48 - 49

Ustalenie wartości  $\mu$  w procedurze „C” jest możliwe na cztery sposoby:

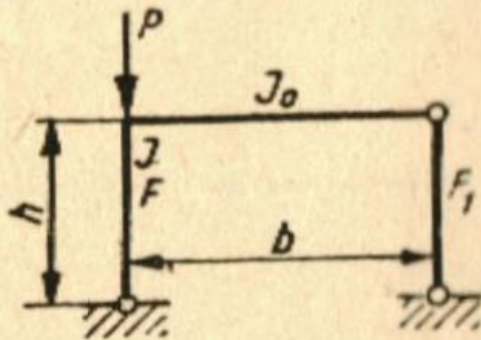
- tabele dla ram parterowych (traktowanych jako przechyłowe) → #t / 60 - 64
- Europejska metoda dla ram wielokondygnacyjnych (przechyłowe i nie-) → #t / 65 - 67
- Amerykańska metoda dla ram wielokondygnacyjnych (przechyłowe i nie-) → #t / 68 - 69
  - Analiza numeryczna ram (przechyłowe i nie-) → #t / 70

## Ramy parterowe

"Tablice do projektowania konstrukcji metalowych", W. Bogucki, M. Żybertowicz, Arkady, Warszawa 1984

$$(v = \mu)$$

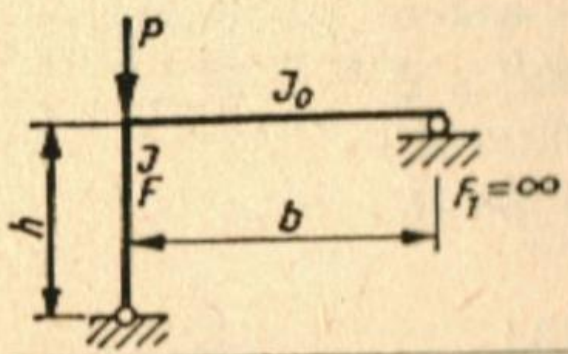
Rodzaj ramy	Oznaczenia	Współczynnik
	$n = \frac{P_1}{P}$ $c = \frac{Jb}{J_0 h}$ $s = \frac{4J}{b^2 F}$	$\sqrt{0,5(1+n)} \times$ $\times \sqrt{4 + 1,4(c + 6s) + 0,02(c + 6s)^2}$



$$c = \frac{2Jb}{J_0h}$$

$$s = \frac{J}{b^2} \times \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right)$$

$$\sqrt{4 + 1,4(c + 6s) + 0,02(c + 6s)^2}$$

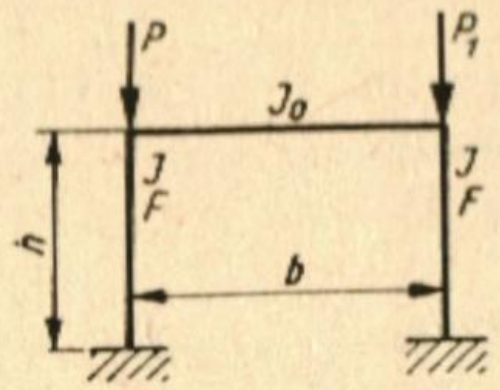


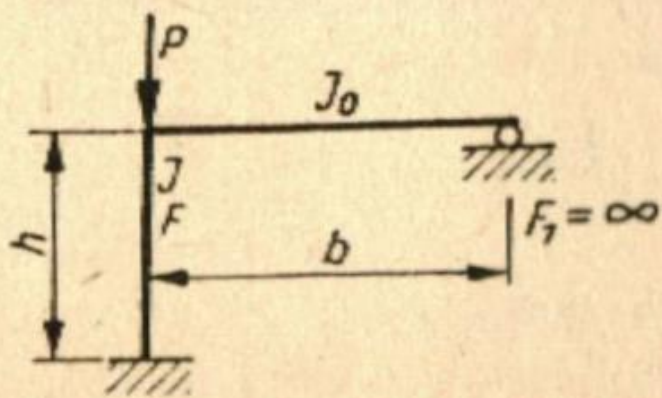
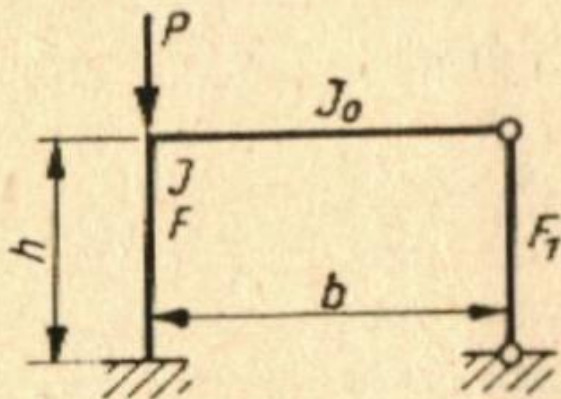
$$n = \frac{P_1}{P}$$

$$c = \frac{Jb}{J_0h}$$

$$s = \frac{4J}{b^2F}$$

$$\sqrt{0,5(1+n)} \times \sqrt{1 + 0,35(c + 6s) - 0,017(c + 6s)^2}$$



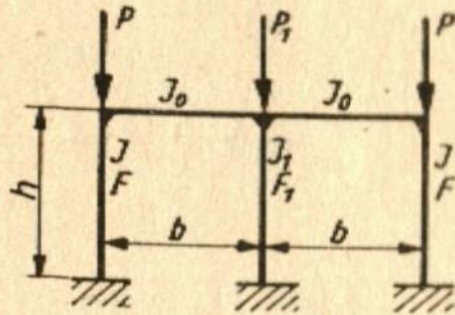


$$c = \frac{2Jb}{J_0h}$$

$$s = \frac{J}{b^2} \times$$

$$\times \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right)$$

$$\sqrt{1 + 0,35(c + 6s) - 0,017(c + 6s)^2}$$



$$n = \frac{P_1}{P}$$

$$t = \frac{J_1}{J}$$

$$c = \frac{Jb}{J_0h}$$

$$s = \frac{4J}{b^2F}$$

$$c_n = c + \frac{9}{4}s$$

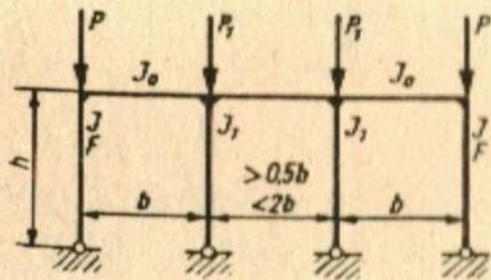
dla słupów skrajnych

$$\frac{1 + 0,4c_n}{1 + 0,2c_n} \sqrt{\frac{2+n}{2+t}}$$

dla słupów środkowych

$$\frac{1 + 0,4c_n}{1 + 0,2c_n} \sqrt{\frac{2+n}{2+t}} \times \sqrt{\frac{t}{n}}$$

ważne dla  $\nu \leq 3$



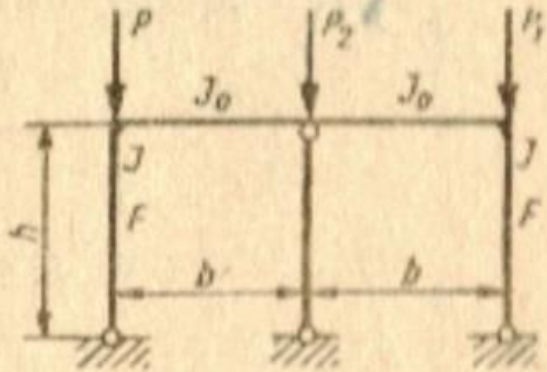
dla słupów skrajnych

$$\frac{1 + 0,4c_n}{1 + 0,2c_n} \sqrt{\frac{1+n}{1+t}}$$

dla słupów środkowych

$$\frac{1 + 0,4c_n}{1 + 0,2c_n} \sqrt{\frac{1+n}{1+t}} \times \sqrt{\frac{t}{n}}$$

ważne dla  $\nu \leq 3$



$$n = \frac{P_2}{P}$$

$$m = \frac{P_1}{P}$$

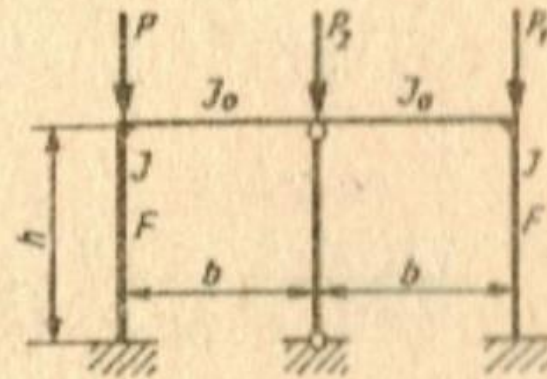
$$c = \frac{Jb}{J_0 h}$$

$$s = \frac{4J}{b^2 F}$$

$$\sqrt{0,5(1+m)} \times$$

$$\times \sqrt{4 + 1,40(c+6s) - 0,02(c+6s)^2} \times$$

$$\times \sqrt{1 + 0,48n}$$



$$\sqrt{0,5(1+m)} \times$$

$$\times \sqrt{1 + 0,35(c+6s) - 0,017(c+6s)^2} \times$$

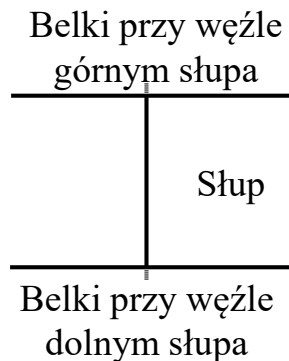
$$\times \sqrt{1 + 0,43n}$$

## Metoda europejska, ramy wielopiętrowe

Stara Polska Norma PN-B 3200 i niektóre Załącznik Krajowe do EN 1993-1-1

### Sztywność węzła

Rys: Autor








$$\kappa = \max [0,3 ; K_C / (K_C + K_0) ]$$

$$K_C = J_C / h$$

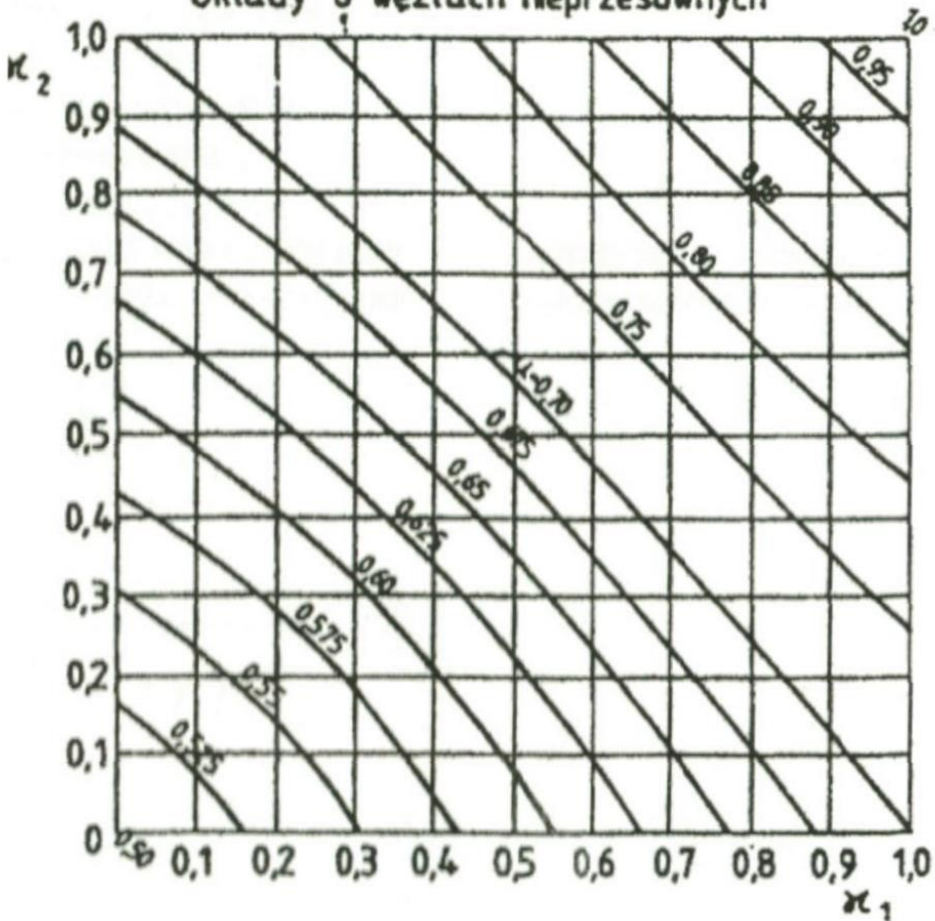
$$K_0 = \Sigma (\eta J_B / L )$$

- uwzględnia się współpracę z belkami;
- nie uwzględnia się współpracy z wyższymi i niższymi kondygnacjami słupa;

Rys: Autor

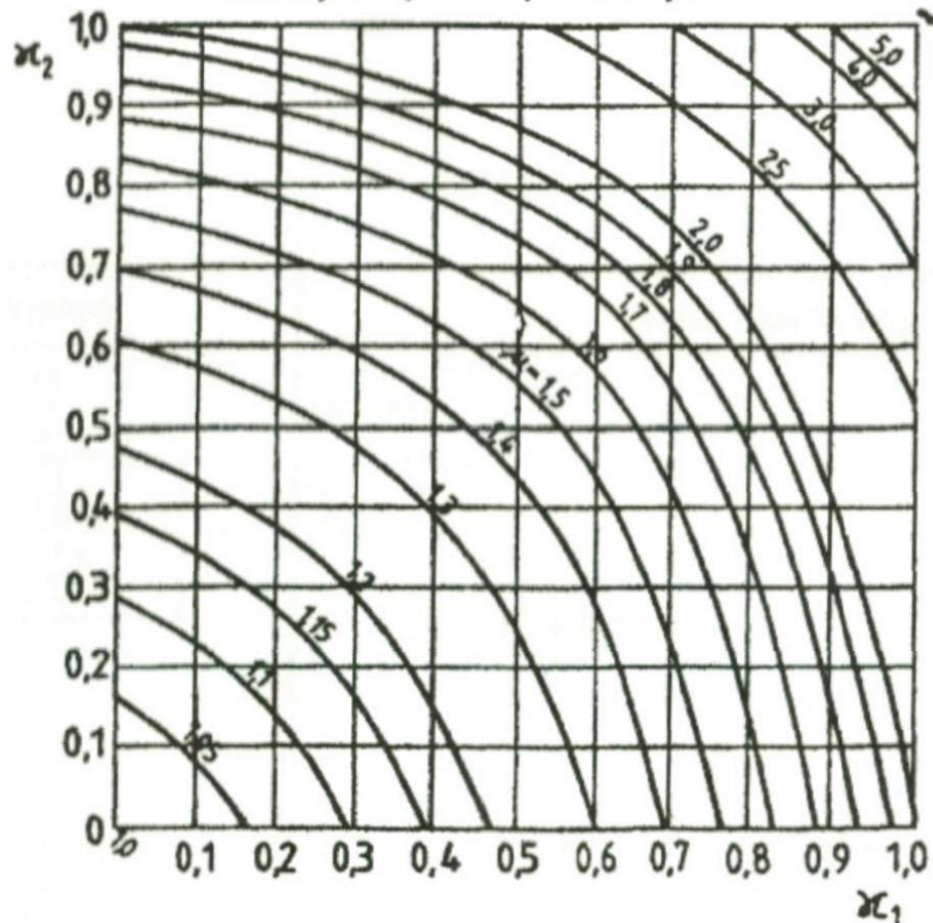
Wpływ belek (rozpatrywany słup, podparcie belki na drugim końcu):	$\eta$	
	Rama nieprzesuwna	Rama przesuwna
	1,5	0,5
	2,0	1,0
	0	
	$K_0 = 0,1 K_C$	
	$K_0 = K_C$	

Układy o węzłach nieprzesuwnych



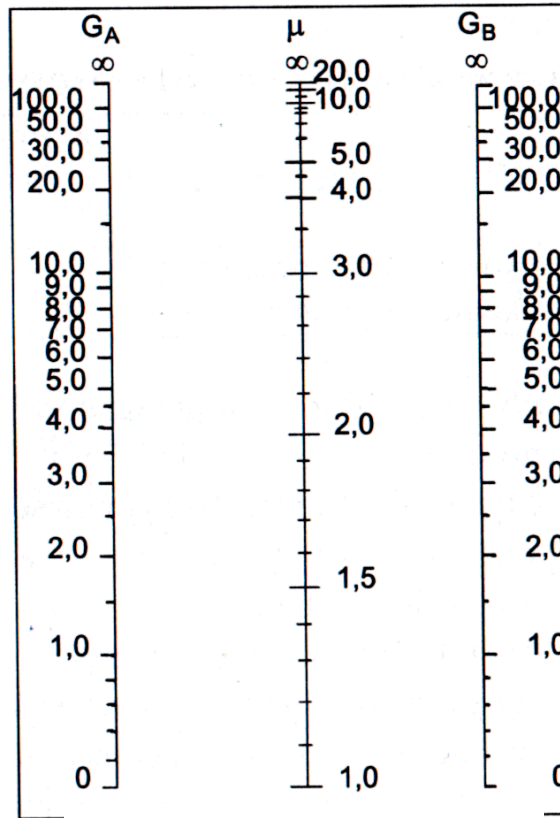
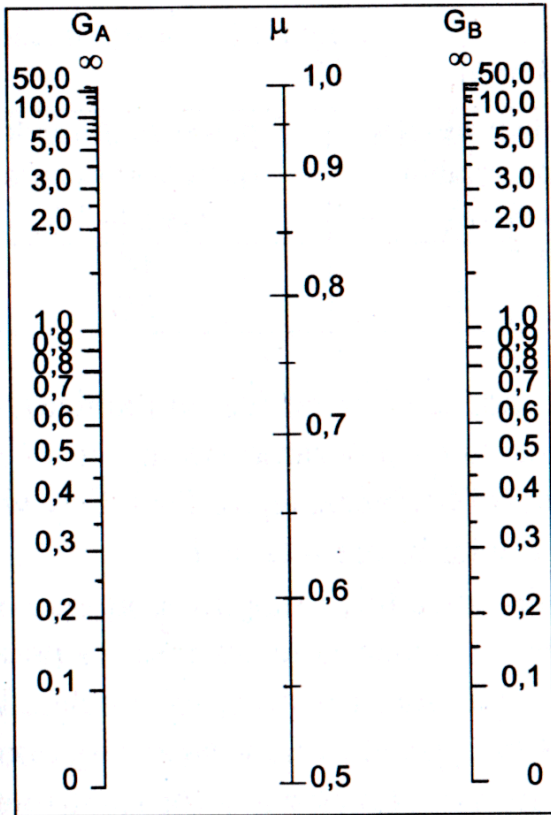
Rys: PN-B 3200 fig. Z1-3

Układy o węzłach przesuwnych



# Metoda amerykańska, rama wielopiętrowa

## Rama nieprzesuwna



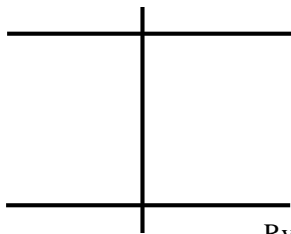
Rys: M. Łubiński, W. Żółtowski  
"Konstrukcje metalowe", Arkady,  
Warszawa 2000

Sztywność węzła

$$G = [\Sigma (J_C / h)] / [\Sigma (\eta J_B / L)]$$






## Rama przesuwna

- uwzględnia się współpracę z belkami;
- uwzględnia się współpracę z wyższymi i niższymi kondygnacjami słupa;



Rys: Autor

Rys: Autor

Wpływ belek (rozpatrywany słup, podparcie belki na drugim końcu):	$\eta$	
	Rama nieprzesuwna	Rama przesuwna
	1,500	0,500
	2,000	0,667
	0	
	$G = 10,000$	
	$G = 1,000$	

## Obliczenia numeryczne

Różne programy mogą podawać różne informacje jako wynik analizy wyboczeniowej.

Zazwyczaj jest to jedna z czterech możliwości:

- $N_{cr}$  (siła krytyczna);
- $\mu$  (współczynnik wyboczeniowy);
- $L_{cr}$  (długość krytyczna);
- $\alpha_{cr}$  (mnożnik krytyczny)

$$L_{cr} = H_{\text{column}} \mu$$

$$N_{cr} = N_{Ed} \alpha_{cr}$$

Zgodnie z informacją z wyk # 5 / 41, smukłość można zdefiniować jako

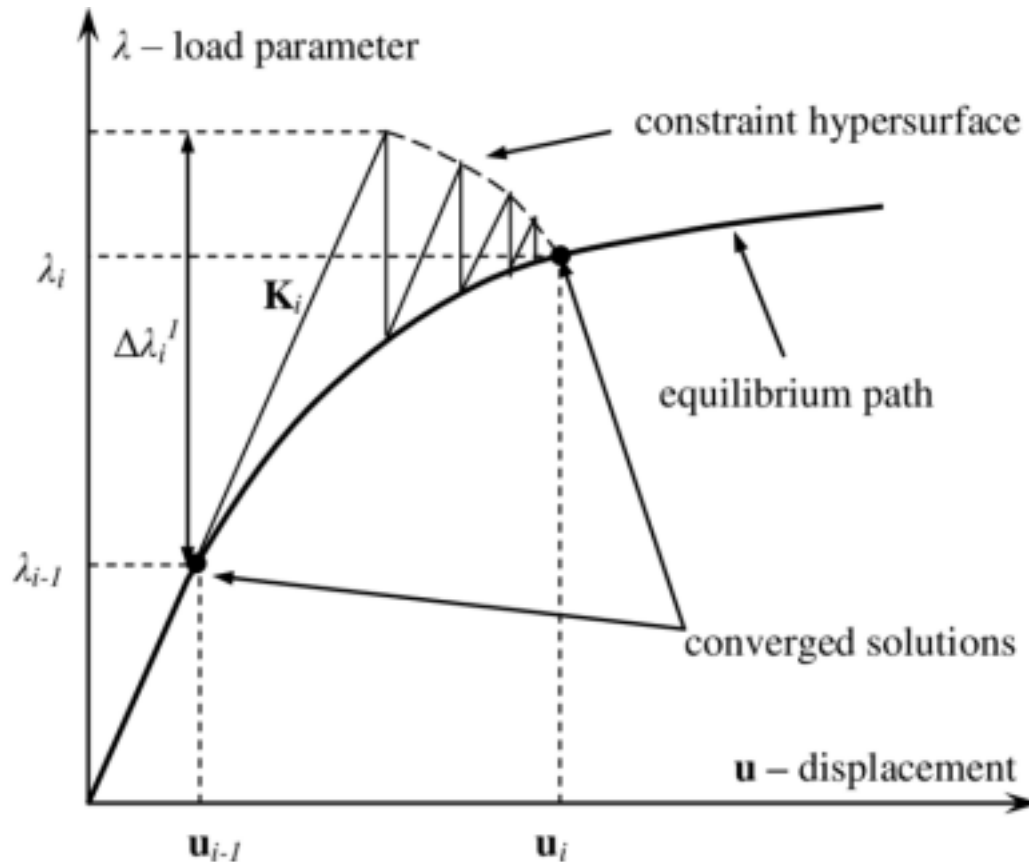
$$\lambda_k = (L_{cr,k} / i_k) (1 / \lambda_1) \quad ; \quad \lambda_1 = 93,9 \varepsilon \quad ; \quad k = y, z$$

lub jako

$$\lambda_k = \sqrt{(A_{(\text{eff})} f_y / N_{cr,k})} \quad ; \quad k = y, z$$

Zatem każdy rezultat z analizy numerycznej da się finalnie zastosować we wzorach Eurokodu.

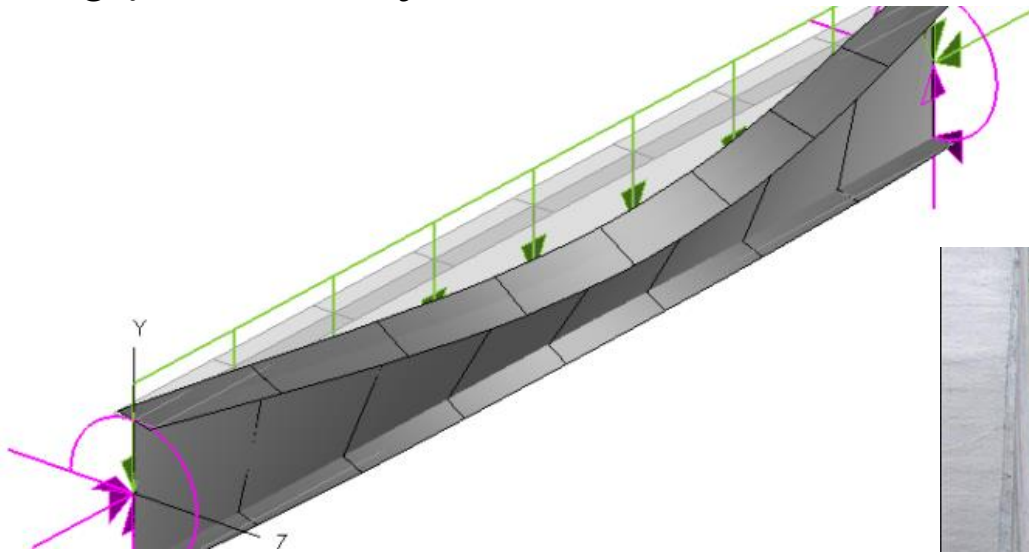
## Efekty II rzędu uwzględniane są w analizie numerycznej w zakresie nieliniowej geometrii



Rys: Simulation of beam-column stability with automatic strain incrementation, J. Szalai, F. Papp, Conference: Proceedings of the sixth conference on Computational structures technology

# Zwicherungie

Utrata stateczności przy zginaniu: równoczesne się przekroju i wygięcie elementu względem osi słabej.



Rys: ssrweb.org



Rys: civildigital.com

Skęęenie występuje przy wyboczeniu skęęnym, skęęno-gięnym i zwicherungiu

Podparcie stopy słupa (sztywne lub przegubowe) zapobiega obu rodzajom deformacji (skręceniu i wygięciu) w punkcie podparcia.

Tak samo – z powodu współpracy z belką / rygłem dzieje się w miejscu połączenia sztywnego słupa z elementem poziomym.



Rys: j-p.com.ua



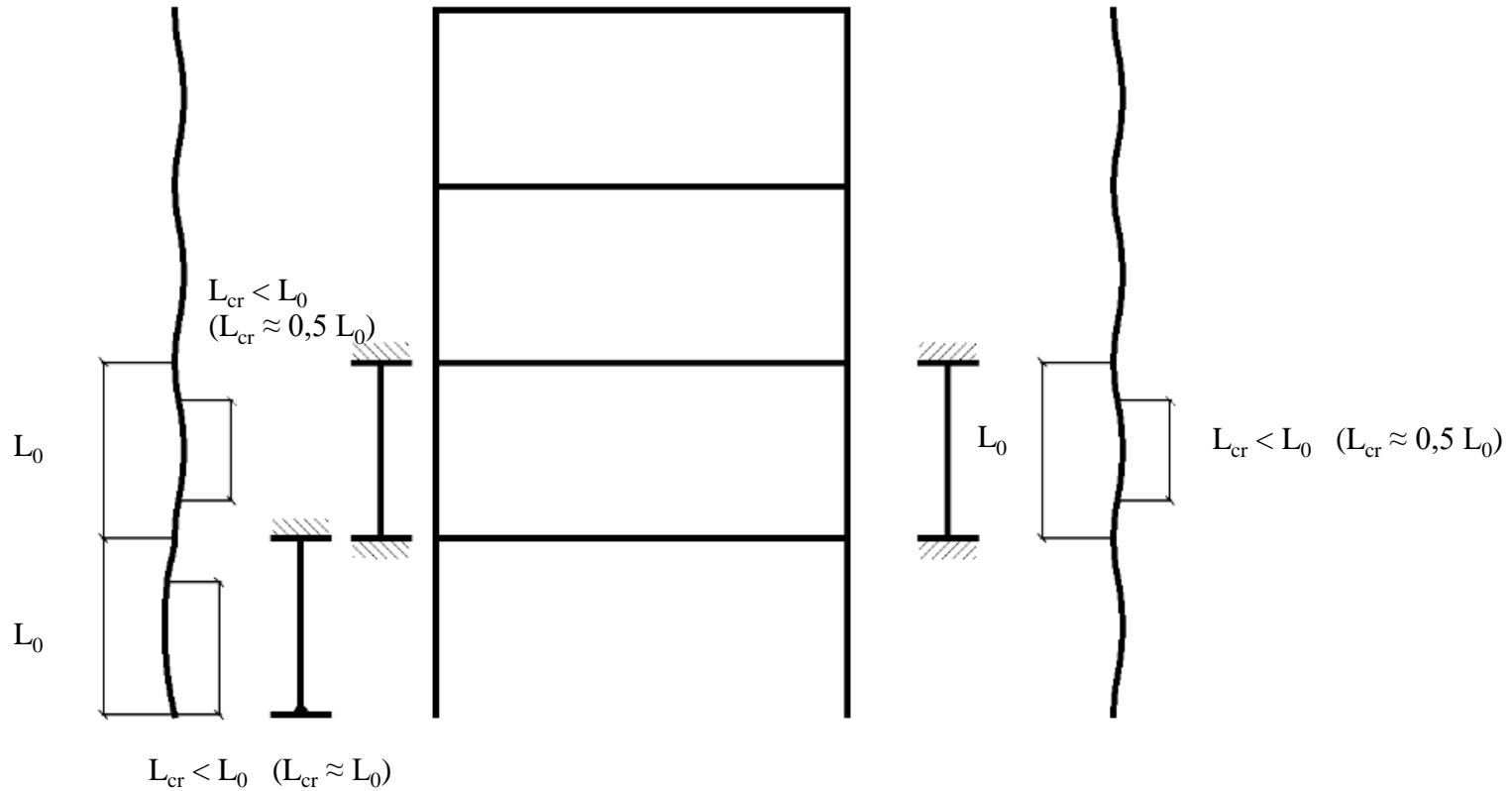
Rys: srt251fpaler.blogspot.com



Rys: moellereengineering.com

## Giętna postać utraty stateczności

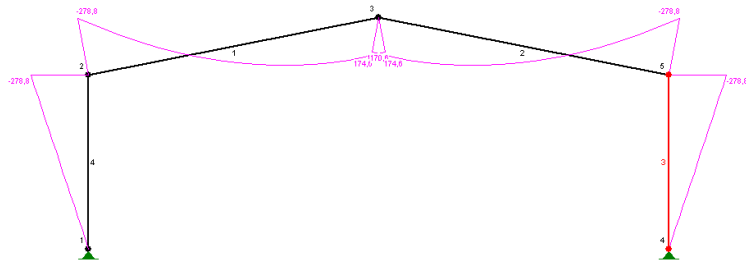
## Skrętna postać utraty stateczności



W obu przypadkach bezpieczne jest przyjęcie  $L_{cr} = L_0$

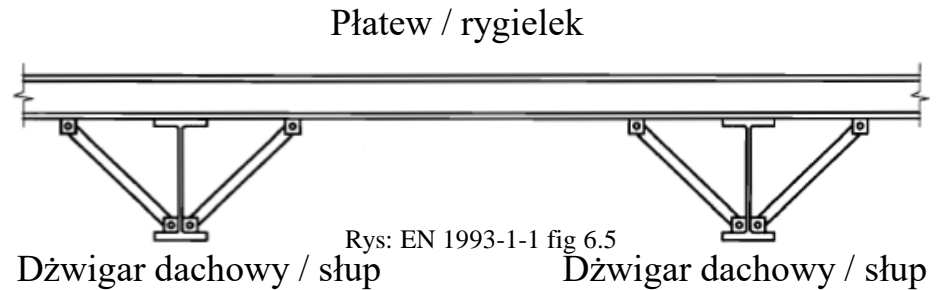
Rys: Autor

Najczęstszym przypadkiem w ramie jest ściskanie (przy zginaniu) zewnętrznej półki słupa). To, która półka jest ścismana jest ważne, gdyż stężenia (jeśli są potrzebne) powinny podierać półkę ścismaną.



Rys: Autor

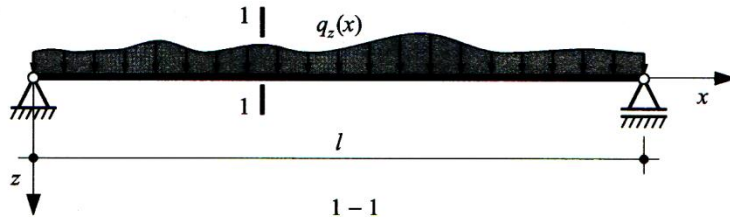
Rys: nowbuildings.com.au



Zabezpieczenie słupa przed zwichrzeniem można zrobić taką samą metodą, co dla dźwigara dachowego:

- Płatwie i stężenia dachowe dla dźwigara dachowego;
- Rygielki obudowy i stężenia ściennie dla słupa.

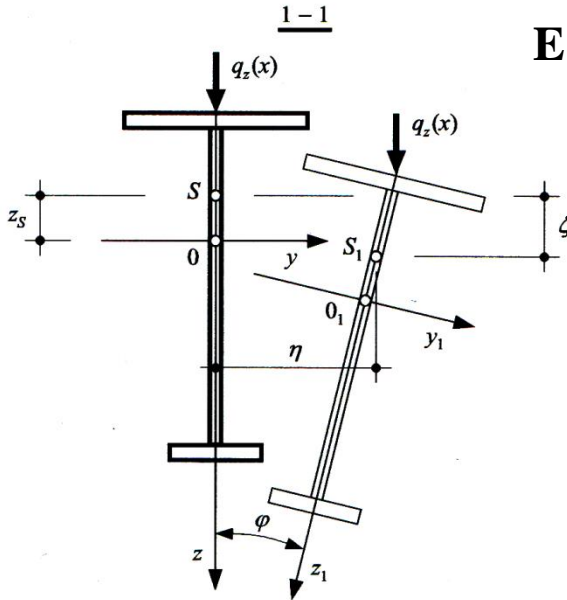
Pełen zapis równań zwichrzenia:



$$E J_z \eta'''' + (M_y \varphi)'' = 0$$

$$E J_w \varphi'''' - [(2 \beta_z M_y + G J_T) \varphi']' + q_z (e_z - z_s) \varphi + M_y \eta'' = 0$$

$$\beta_z = \left\{ \int_A [z (y^2 + z^2) dA] - z_s \right\} / (2 J_y)$$



Wzór uproszczony:

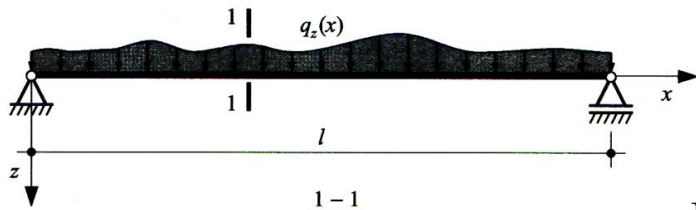
$$M_{cr} = i_s \sqrt{(N_{cr,z} N_{cr,T})}$$

$$N_{cr,z} = \pi^2 E J_z / (\mu_z l_{0z})^2$$

$$N_{cr,T} = [\pi^2 E J_w / (\mu_T l_{0T})^2 + G J_t] / i_s^2$$

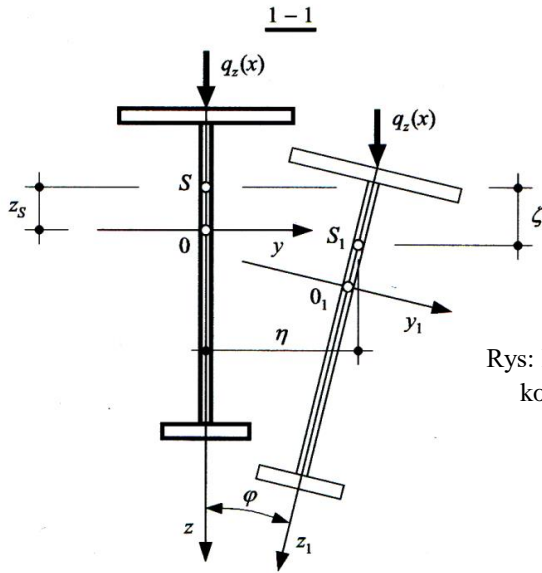
Rys: K. Rykaluk, Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych, DWE 2012

Długości krytyczne **wyboczenia** i **skręcenia** są w obu wzorach uwzględniane oddzielnie: we współczynnikach  $\eta(x)$  i  $\varphi(x)$  w pełnym zapisie, lub we współczynnikach  $\mu_z$  i  $\mu_T$  w uproszczonym. **Nie ma** jednej długości krytycznej dla zwichrzenia; zawsze są **dwie długości krytyczne**.



## Interakcja wyboczenia i zwichrzenia

Pełen zapis wzorów różniczkowych dla tej interakcji jest skomplikowany (zmiana względem „czystego” zwichrzenia):



Rys: K. Rykaluk, Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych, DWE 2012

$$E J_z \eta'''' + (M_y \varphi)'' - [N (\eta' + \varphi' z_s)]' = 0$$

$$E J_z \zeta'''' + (M_z \varphi)'' - [N (\zeta' - \varphi' y_s)]' = 0$$

$$E J_w \varphi'''' - [(2 \beta_z M_y + G J_T) \varphi' + r_s^2 N - 2 \beta_z M_z]' + [q_y (e_y - y_s) + q_z (e_z - z_s)] \varphi + M_y \eta'' - z_s (N \eta')' + y_s (N \zeta')' = 0$$

$$\beta_z = \left\{ \int_A [z (y^2 + z^2) dA] - z_s \right\} / (2 J_y)$$

Rozwiązanie analityczne jest możliwe tylko w kilku konkretnych przypadkach. Wzór przedstawiony w Eurokodzie opiera się nie na wzorach różniczkowych, ale na tradycyjnej metodzie – rozszerzeniu problemu nośności przekroju :

$$N_{Ed} / A + M_{Ed, y} / W_y + M_{Ed, z} / W_z \leq f_y$$

Można to zapisać jako:

$$n + m_y + m_z \leq 1,0$$

$n, m_x, m_y$  – wyęźnienie pod siłą osiową i momentami zginającymi.

**Stateczność, analogicznie, to:**

$$n / \chi_{x, y} + k_{ij} m_y / \chi_{LT} + k_{ij} m_z \leq 1,0$$

$\chi_{x, y}, \chi_{LT}$  – współczynniki utraty stateczności;

$k_{ij}$  – współczynniki interakcji.

## Interakcja różnych form niestateczności

Po ustaleniu współczynnika długości wyboczeniowej  $\mu_y$  i współczynnika wyboczenia  $\chi_y$  sprawdza się wyboczenie słupa ( $\rightarrow$  wyk #5).

Po wyliczeniu wartości  $\chi_y$ , interakcja wyboczenia i zwichrzenia jest analizowana w metodzie „B” i „C” przez:

Metodę „niemiecką” (zalecana)  $\rightarrow$  #t / 80 - 85

lub

Metodę „francuską”  $\rightarrow$  #t / 80 - 81, 86 - 90

lub

Metodę „polską” (szybka, mało dokładna)  $\rightarrow$  #t / 80, 91 - 92

Nazwy metod pochodzą ze starych norm krajowych, obowiązujących przed wprowadzeniem Eurokodów.

„Niemiecka” (normy austriacka i niemiecka) metoda (EN 1993-1-1, zał. B) – zalecana, prostsza niż „Francuska”.

„Francuska” (normy francuska i belgijska) metoda (EN 1993-1-1, zał. A) – bardziej skomplikowana w porównaniu z „Niemiecką”.

„Polska” (stara polska norma PN B 3200 do konstrukcji metalowych) metoda (EN 1993-1-1, NA 20) – szybka lecz mało dokładna. Wyteżenie według „Polskiej” jest większe niż według „Niemieckiej”; co za tym idzie może dojść do przewymiarowania przekrojów.

## Metody niemiecka i francuska:


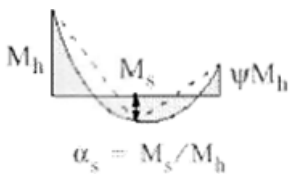

$$N_{Ed} / (\chi_y N_{Rk} / \gamma_{M1}) + k_{yy} (M_{y, Ed} + \Delta M_{y, Ed}) / (\chi_{LT} M_{y, Rk} / \gamma_{M1}) + k_{yz} (M_{z, Ed} + \Delta M_{z, Ed}) / (M_{z, Rk} / \gamma_{M1}) \leq 1,0$$

$$N_{Ed} / (\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}) + k_{zy} (M_{y, Ed} + \Delta M_{y, Ed}) / (\chi_{LT} M_{y, Rk} / \gamma_{M1}) + k_{zz} (M_{z, Ed} + \Delta M_{z, Ed}) / (M_{z, Rk} / \gamma_{M1}) \leq 1,0$$

EN 1993-1-1 (6.61), (6.62)

	$k_{yy}, k_{yz}, k_{zy}, k_{zz}$
Metoda francuska	EN 1993-1-1 zał. A, tab. A1, A2
Metoda niemiecka	EN 1993-1-1 zał. B, tab. B1, B2, B3

# Metoda „Niemiecka” EN 1993-1-1 tab. B.3


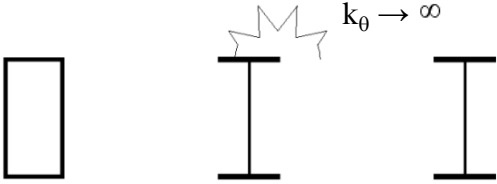

Wykres momentów	Zakres		$C_{my}$ i $C_{mz}$ i $C_{mLT}$	
			Obciążenie równomierne	Obciążenie skupione
	$-1 \leq \Psi \leq 1$		$\max(0,6 + 0,4 \Psi ; 0,4)$	
	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \Psi \leq 1$	$\max(0,2 + 0,8 \alpha_s ; 0,4)$	$\max(0,2 + 0,8 \alpha_s ; 0,4)$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \Psi \leq 1$	$\max(0,1 - 0,8 \alpha_s ; 0,4)$	$\max(-0,8 \alpha_s ; 0,4)$
		$-1 \leq \Psi < 0$	$\max[0,1(1 - \Psi) - 0,8 \alpha_s ; 0,4)$	$\max[0,2(-\Psi) - 0,8 \alpha_s ; 0,4)$
	$0 \leq \alpha_s \leq 1$	$-1 \leq \Psi \leq 1$	$0,95 + 0,05 \alpha_h$	$0,9 + 0,1 \alpha_h$
	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \leq \Psi \leq 1$	$0,95 + 0,05 \alpha_h$	$0,9 + 0,1 \alpha_h$
		$-1 \leq \Psi < 0$	$0,95 + 0,05 \alpha_h (1 + 2 \Psi)$	$0,9 - 0,1 \alpha_h (1 + 2 \Psi)$

W przypadku przechyłowej postaci wybożenia można przyjmować odpowiednio  $C_{my} = 0,9$  lub  $C_{mz} = 0,9$ .

$C_{my}$ ,  $C_{mz}$  i  $C_{mLT}$  ustala się odpowiednio do rozkładu momentów między punktami podparcia (stężeniami) jak następuje:

Współczynnik momentu:	oś zginania:	kierunek podparcia:
$C_{my}$	y-y	z-z
$C_{mz}$	z-z	y-y
$C_{mLT}$	y-y	y-y

W metodzie „Niemieckiej” przekroje podzielono na wrażliwe i niewrażliwe na deformacje skrętne.

Przekrój	Uwagi
	<p>Brak zwichrzenia, brak konieczności sprawdzania interakcji wyboczenia i zwichrzenia</p>
 <p>Krótkie elementy:  <math>1 / [\Phi_{LT} + \sqrt{(\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^2)}] \geq 1,0</math></p>	<p>Elementy niewrażliwe na deformacje skrętne, EN 1993-1-1 tab. B.1</p>
 <p><math>1 / [\Phi_{LT} + \sqrt{(\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^2)}] &lt; 1,0</math></p>	<p>Elementy wrażliwe na deformacje skrętne, EN 1993-1-1 tab. B.2</p>

# Metoda „Niemiecka”, współczynniki interakcji

EN 1993-1-1 tab. B.1

$$n_y = N_{Ed} \gamma_{M1} / (\chi_y N_{Rd})$$

$$n_z = N_{Ed} \gamma_{M1} / (\chi_z N_{Rd})$$

Współczynniki interakcji	Przekrój	Klasy przekroju I i II	Klasy przekroju III i IV
$k_{yy}$	I, H, RHS	$C_{my} \cdot \min \{ 1 + 0,6 \lambda_y n_y ;$ $1 + 0,6 n_y \}$	$C_{my} \cdot \min \{ 1 + (\lambda_y - 0,2) n_y ;$ $1 + 0,8 n_y \}$
$k_{yz}$	I, H, RHS	$0,6 k_{zz}$	$k_{zz}$
$k_{zy}$	I, H, RHS	$0,6 k_{yy}$	$0,8 k_{yy}$
$k_{zz}$	I, H	$C_{mz} \cdot \min \{ 1 + (2 \lambda_z - 0,6) n_z ;$ $1 + 1,4 n_z \}$	$C_{mz} \cdot \min \{ 1 + 0,6 \lambda_z n_z ;$ $1 + 0,6 n_z \}$
	RHS	$C_{mz} \cdot \min \{ 1 + (\lambda_z - 0,2) n_z ;$ $1 + 0,8 n_z \}$	

W przypadku ściskania i jednokierunkowego zginania  $M_{y, ED}$ , dla przekrojów w/j można przyjąć  $k_{zy} = 0$

# Metoda „Niemiecka”, współczynniki interakcji

EN 1993-1-1 tab. B.2

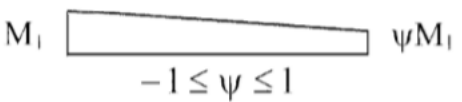
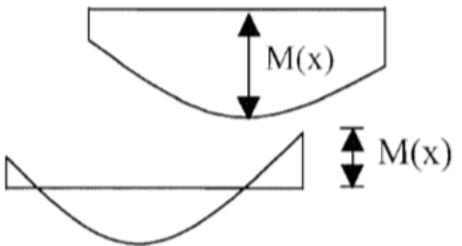

$$n_y = N_{Ed} \gamma_{M1} / (\chi_y N_{Rd})$$

$$n_z = N_{Ed} \gamma_{M1} / (\chi_z N_{Rd})$$

$$C = 0,05 / (C_{mLT} - 0,25)$$

Współczynniki interakcji	Klasy przekroju I i II	Klasy przekroju III i IV
$k_{yy}$	Tak samo jak w Tab. B1	
$k_{yz}$	Tak samo jak w Tab. B1	
$k_{zy}$	$\lambda_z \geq 0,4:$ $\min \{ 1 - 2 C \lambda_z n_z ;$ $1 - 2 C n_z \}$	$\min \{ 1 - C \lambda_z n_z ;$ $1 - C n_z \}$
	$\lambda_z < 0,4:$ $\min \{ 0,6 - \lambda_z ;$ $1 - 2 \lambda_z C n_z \}$	
$k_{zz}$	Tak samo jak w Tab. B1	

Metoda „Francuska” EN 1993-1-1 tab. A.2

Wykres momentów	$C_{mi,0}$ ( $i = y, z$ )
 <p><math>M_1</math> <math>\psi M_1</math> <math>-1 \leq \psi \leq 1</math></p>	$0,79 + 0,21 \Psi_i + 0,36(\Psi_i - 0,33)(N_{Ed} / N_{cr,i})$
 <p><math>M(x)</math> <math>M(x)</math> <math>\delta_x</math></p>	$1 + \{[\pi^2 E J_i  \delta_x  / L^2  M_{i,Ed}(x) ] - 1\} (N_{Ed} / N_{cr,i})$ $M_{i,Ed}(x) = \max M_{y,Ed} \text{ lub } \max M_{z,Ed}$ <p><math>\delta_x = \max \text{ ugięcie}</math></p>
	$1 - 0,18 N_{Ed} / N_{cr,i}$ $1 + 0,33 N_{Ed} / N_{cr,i}$

## Metoda „Francuska” EN 1993-1-1 tab. A.1, część I

$$N_{cr, y}, N_{cr, z}, N_{cr, T}, N_{cr, z-T} \rightarrow \#5 / 35$$

$$\varepsilon_y = (M_{y, Ed} A) / (N_{Ed} W_{el, y}) - \text{klasy przekroju I - III}$$

$$\varepsilon_y = (M_{y, Ed} A_{eff}) / (N_{Ed} W_{eff, y}) - \text{IV klasa przekroju}$$

$$C_1 = 1 / k_c^2$$

$$k_c \rightarrow \#5 / 71$$

$$a_{LT} = \max ( 1 - J_t / J_y ; 0 )$$

$$\lambda_0 - \text{smukłość dla zwichrzenia, } M = \text{const} (\rightarrow \#5 / 61)$$

$\lambda_{LT}$  – smukłość dla zwichrzenia przy rzeczywistym rozkładzie momentów zginajacych

$$\lambda_{\max} = \max (\lambda_y ; \lambda_z)$$

$$n_y = N_{Ed} / N_{cr, y}$$

$$n_z = N_{Ed} / N_{cr, z}$$

$$n_T = N_{Ed} / N_{cr, T}$$

$$n_{z-T} = N_{Ed} / N_{cr, z-T}$$

# Metoda „Francuska” EN 1993-1-1 tab. A.1, część II

$$\lambda_{\text{comp}} = 0,2 (\sqrt{C_1}) \{^4\sqrt{[(1 - n_z) (1 - n_{z-T})]}\}$$

$\lambda_0 \leq \lambda_{\text{comp}}$	$\lambda_0 > \lambda_{\text{comp}}$
$C_{\text{my}} = C_{\text{my}, 0}$ $C_{\text{mz}} = C_{\text{mz}, 0}$ $C_{\text{mLT}} = 1,0$	$C_{\text{my}} = C_{\text{my}, 0} + (1 - C_{\text{my}, 0}) (a_{\text{LT}} \sqrt{\varepsilon_y}) / (1 + a_{\text{LT}} \sqrt{\varepsilon_y})$ $C_{\text{mz}} = C_{\text{mz}, 0}$ $C_{\text{mLT}} = \max (1,0 ; C_{\text{my}}^2 a_{\text{LT}} / \{^4\sqrt{[(1 - n_z) (1 - n_{z-T})]}\} )$

$$m_y = M_{y, \text{Ed}} / M_{\text{pl}, y, \text{Rd}}$$

$$m_z = M_{z, \text{Ed}} / M_{\text{pl}, z, \text{Rd}}$$

$$w_y = \min (W_{\text{pl}, y} / W_{\text{el}, y} ; 1,5)$$

$$w_z = \min (W_{\text{pl}, z} / W_{\text{el}, z} ; 1,5)$$

$$n_{\text{pl}} = N_{\text{Ed}} / N_{\text{Rd}}$$

$$b_{\text{LT}} = 0,5 a_{\text{LT}} \lambda_0^2 m_y m_z / \chi_{\text{LT}}$$

$$c_{\text{LT}} = 10 a_{\text{LT}} \lambda_0^2 m_y / [\chi_{\text{LT}} C_{\text{my}} (5 + \lambda_z^4)]$$

$$d_{LT} = 2 a_{LT} \lambda_0 m_y m_z / [\chi_{LT} C_{my} C_{mz} (0,1 + \lambda_z^4)]$$

$$e_{LT} = 1,7 a_{LT} \lambda_0 m_y / [\chi_{LT} C_{my} (0,1 + \lambda_z^4)]$$

$$C_{yy} = \max (1 + (w_y + 1) \{ [2 - 1,6 C_{my}^2 (\lambda_{max} + \lambda_{max}^2) / w_y] n_{pl} - b_{LT} \} ; 1 / w_y)$$

$$C_{yz} = \max (1 + (w_y - 1) \{ [2 - (14 C_{my}^2 \lambda_{max}^2) / w_z^5] n_{pl} - c_{LT} \} ; 0,6 \sqrt{[1 / (w_y w_z)]})$$

$$C_{zy} = \max (1 + (w_y - 1) \{ [2 - (14 C_{my}^2 \lambda_{max}^2) / w_z^5] n_{pl} - d_{LT} \} ; 0,6 \sqrt{[1 / (w_y w_z)]})$$

$$C_{zz} = \max (1 + (w_z - 1) \{ [2 - 1,6 C_{mz}^2 (\lambda_{max} + \lambda_{max}^2) / w_z - e_{LT}] n_{pl} \} ; 1 / w_z)$$

$$\mu_y^* = (1 - n_y) / (1 - \chi_y n_y)$$

$$\mu_z^* = (1 - n_z) / (1 - \chi_z n_z)$$

Metoda „Francuska” EN 1993-1-1 tab. A.1, część IV

Współczynniki interakcji	Klasy przekroju I - III	IV klasa przekroju
$k_{yy}$	$C_{my} C_{mLT} \mu_y^* / (1 - n_y)$	$C_{my} C_{mLT} \mu_y^* / [C_{yy} (1 - n_y)]$
$k_{yz}$	$C_{mz} \mu_y^* / (1 - n_z)$	$0,6 [\sqrt{(w_z / w_y)}] C_{mz} \mu_y^* / [C_{zy} (1 - n_z)]$
$k_{zy}$	$C_{my} C_{mLT} \mu_z^* / (1 - n_y)$	$0,6 [\sqrt{(w_y / w_z)}] C_{my} C_{mLT} \mu_z^* / [C_{zy} (1 - n_y)]$
$k_{zz}$	$C_{mz} \mu_z^* / (1 - n_z)$	$C_{mz} \mu_z^* / [C_{zz} (1 - n_z)]$

# Metoda polska

Dwuteowniki, rury prostokątne:

EN 1993-1-1 NA.20

$$N_{Ed} / (\chi_y N_{Rk}) + C_{my} (M_{y, Ed} + \Delta M_{y, Ed}) / (\chi_{LT} M_{y, Rk}) + (M_{z, Ed} + \Delta M_{z, Ed}) / (M_{z, Rk}) \leq 1,0 - \Delta_{0, y}$$

$$N_{Ed} / (\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}) + C_{mz} (M_{y, Ed} + \Delta M_{y, Ed}) / (\chi_{LT} M_{y, Rk}) + (M_{z, Ed} + \Delta M_{z, Ed}) / (M_{z, Rk}) \leq 1,0 - \Delta_{0, z}$$

	$\Delta_{0, y}$	$\Delta_{0, z}$
I i II klasa przekroju	$0,1 + 0,2 [ (W_{pl, y} / W_{el, y}) - 1 ]$	$0,1 + 0,2 [ (W_{pl, z} / W_{el, z}) - 1 ]$
III i IV klasa przekroju	0,1	

$C_{my}, C_{mz}$  - EN 1993-1-1 App. B, tab. B3

## Metoda polska

### Rury okrągłe

$$N_{Ed} / (\chi_y N_{Rk}) + \sqrt{\{ k_{yy} [(M_{y, Ed} + \Delta M_{y, Ed}) / (M_{y, Rk})]^2 + C_{mz} [(M_{z, Ed} + \Delta M_{z, Ed}) / (M_{z, Rk})]^2\}} \leq 1,0$$

$$N_{Ed} / (\chi_z N_{Rk}) + \sqrt{\{ k_{zz} [(M_{z, Ed} + \Delta M_{z, Ed}) / (M_{z, Rk})]^2 + C_{my} [(M_{y, Ed} + \Delta M_{y, Ed}) / (M_{y, Rk})]^2\}} \leq 1,0$$

EN 1993-1-1 NA.20

## Deformacje

### **NA. 23 – ad 7.2.2 (1)B**

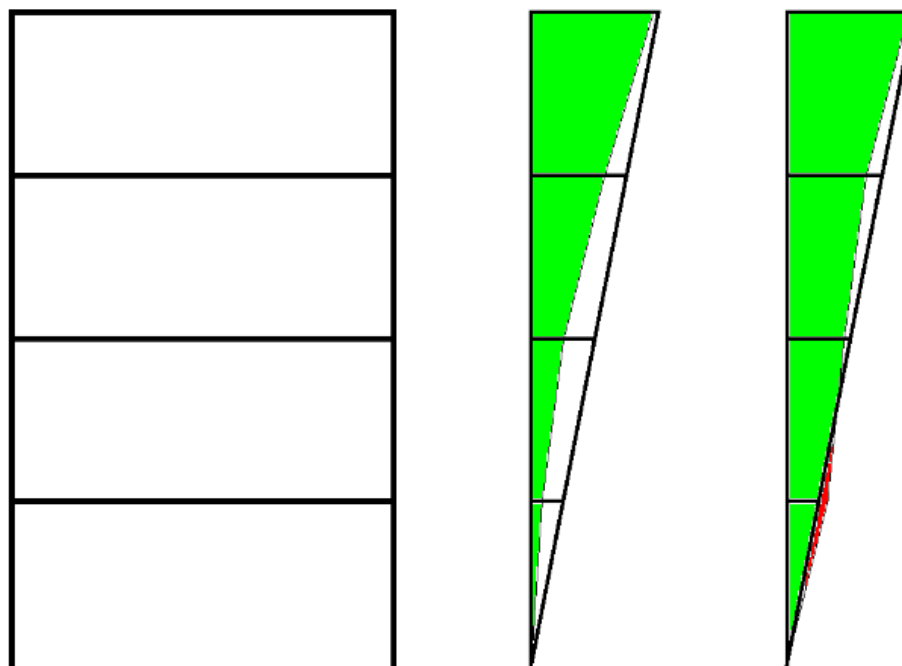
Zaleca się, aby przemieszczenia poziome nie przekraczały poniższych wartości granicznych:

- w układach jednokondygnacyjnych (bez suwnic):  $H/150$ ,
- w układach wielokondygnacyjnych :  $H/500$ ,

gdzie:  $H$  – poziom rozpatrywanego ryglu względem wierzchu fundamentów.

EN 1993-1-1 NA.23

W przypadku konstrukcji wielopiętrowej przemieszczenia poziome należy sprawdzić dla każdego poziomu, a nie tylko dla górnego punktu konstrukcji.



Rys: Autor

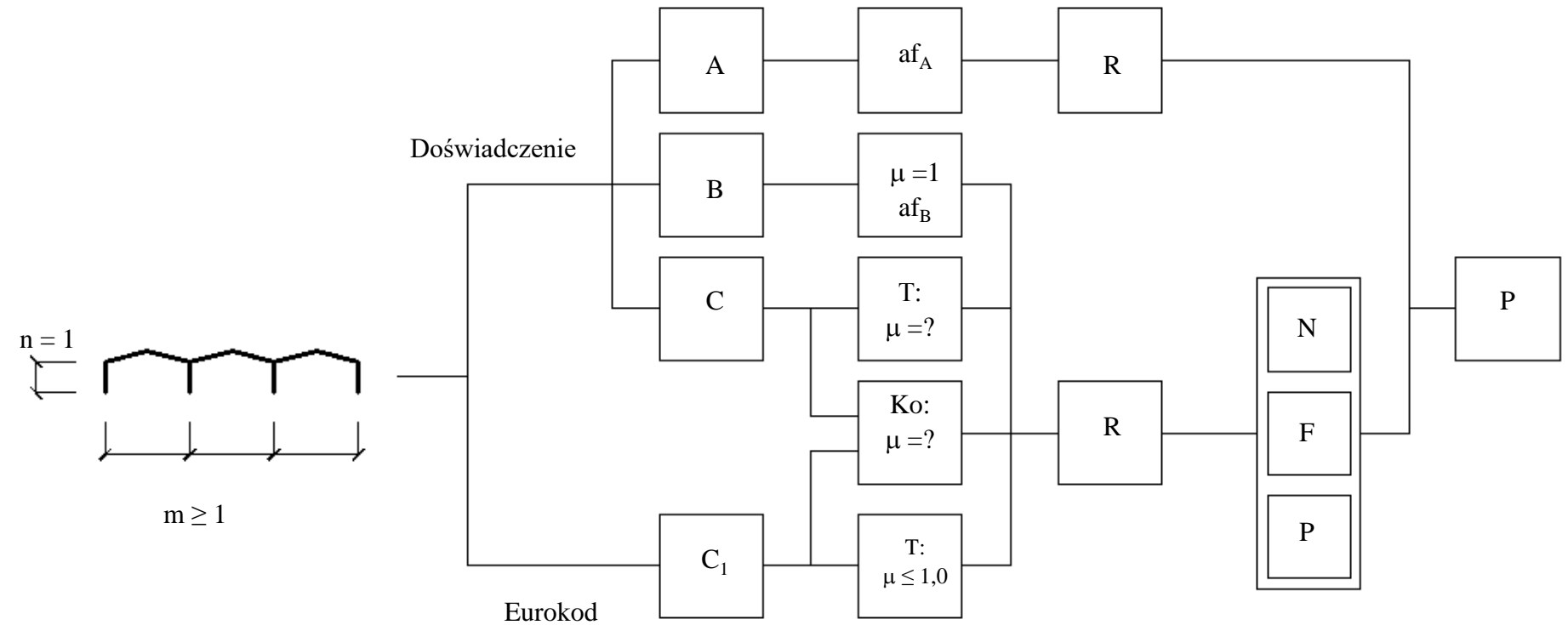
## Podsumowanie

Kilka głównych części algorytmu:

- Decyzja o metodzie obliczeń: A, B, C,  $C_1$  ( $C_1$  oznacza C dla ram parterowych traktowanych jako nieprzesuwne bez przechyłu i bez efektów II rzędu);
- Decyzja o sposobie policzenia  $\mu_y$ : T (tablice), EU (europejska), Am (amerykańska), Ko (komputer);
- Obliczenie af (efekty II rzędu + imperfekcje) dla metody A lub B;
- Sprawdzenie R (resistance = nośność);
- Sprawdzenie interakcji niestateczności metodą N (niemiecką), F (francuską) lub P (polską);
- Sprawdzenie P (przechyły).

Istnieją dwa odrębne algorytmy: dla ram parterowych i wielopiętrowych.

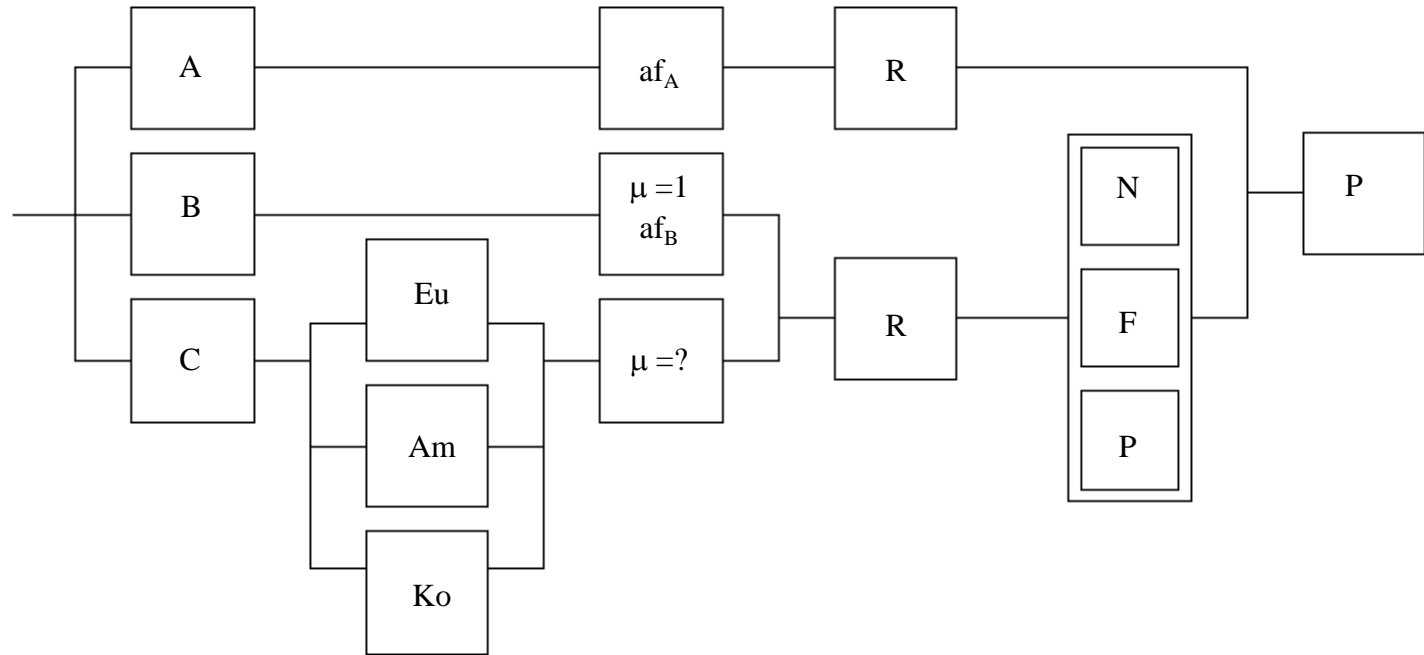
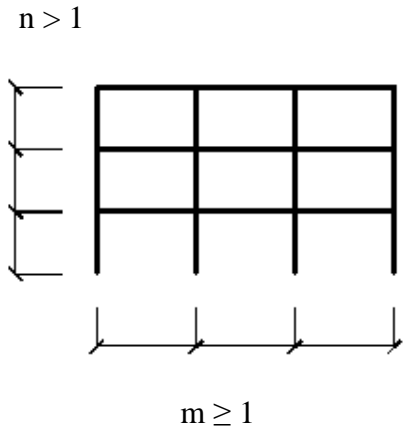
# Ramy parterowe



Rys: Autor

# Ramy wielokondygnacyjne

Rys: Autor



## Zagadnienia egzaminacyjne

Różnica między imperfekcjami a efektami II rzędu

Znaczenie efektów II rzędu dla wyznaczenia stateczności słupów w ramach

Dwuteownik bisymetryczny dwukierunkowo zginany i ściskany – algorytm obliczeń

Metody analizy niestateczności słupa

Dziękuję za uwagę

© 2025 dr inż. Tomasz Michałowski

[tmichal@usk.pk.edu.pl](mailto:tmichal@usk.pk.edu.pl)