

Konstrukcje metalowe

Wykład V

Stateczność

Spis treści

Wprowadzenie → #t / 3

Wyboczenie giętnie → #t / 21

Przykład 1 → #t / 47

Zwichrzenie → #t / 55

Przykład 2 → #t / 87

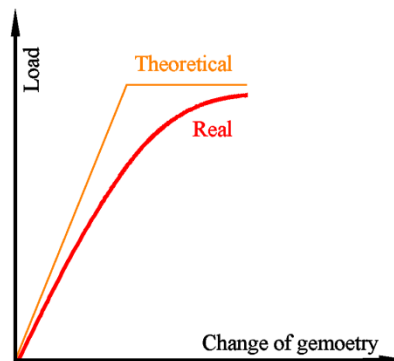
Zagadnienia egzaminacyjne → #t / 97

Wprowadzenie

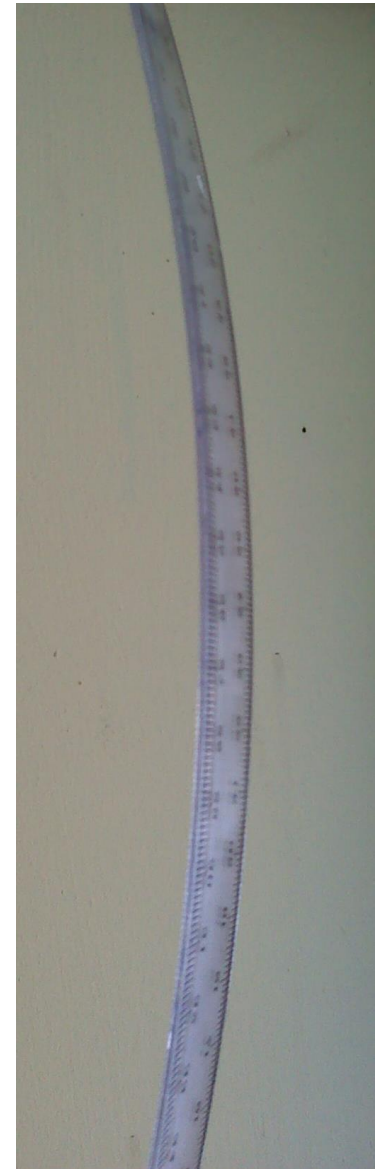
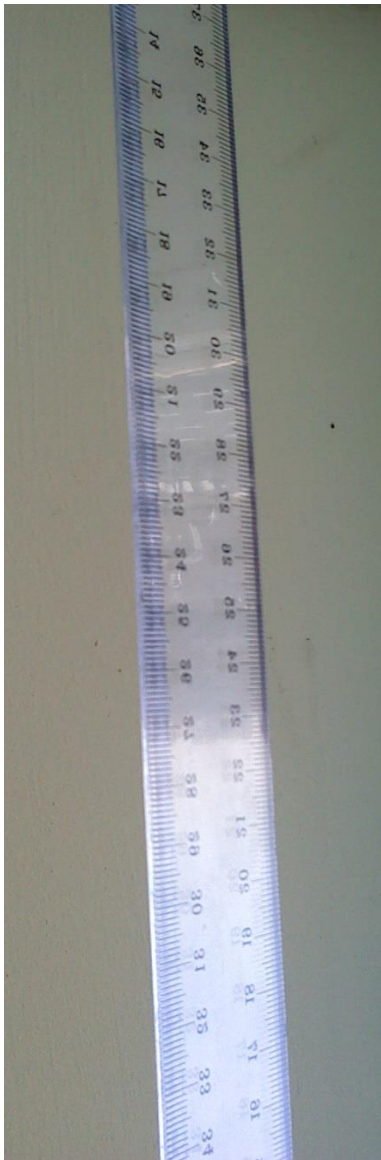
Popularna zabawa z długą giętą linijką:
niestateczność = wyboczenie

Gwałtowna zmiana geometrii konstrukcji (w większości przypadków w zakresie sprężystym), nieproporcjonalnie duża w stosunku do wzrostu obciążenia

Utrata stateczności jest zawsze skutkiem ściskania, nigdy rozciągania



Rys: Autor



Stany graniczne nośności (EN 1990 6.4):

EQU (równowaga) – utrata równowagi całej konstrukcji lub jej części, rozpatrywanej jako ciało sztywne;

STR (wytrzymałość) – zniszczenie wewnętrzne lub nadmierne odkształcenie konstrukcji lub jej części;

GEO (geotechnika) – zniszczenie lub nadmierne odkształcenie podłoża;

FAT (zmęczenie) – zniszczenie zmęczeniowe.

→ #3 / 12

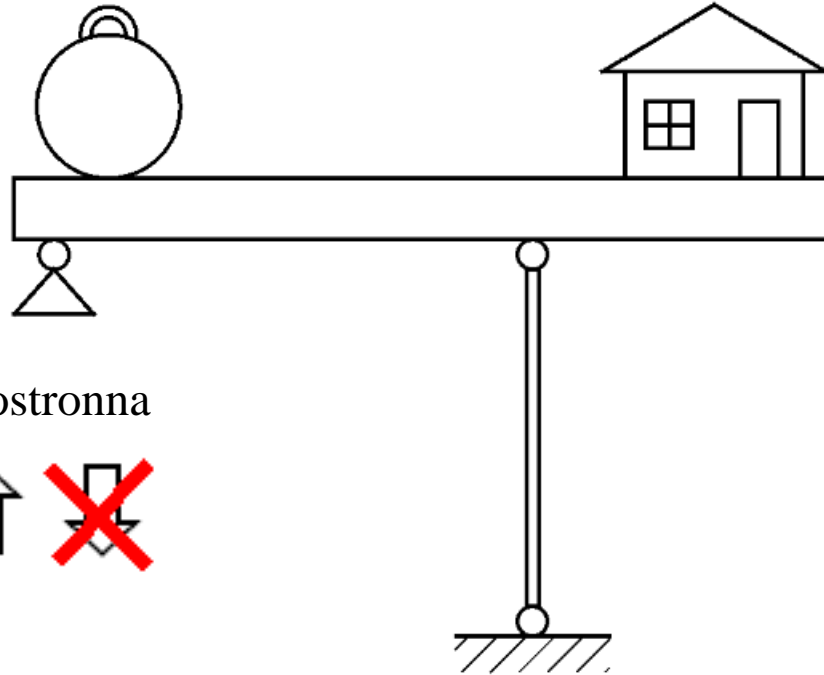
Stany graniczne użyteczności

Co oznaczają poszczególne stany graniczne?

→ #3 / 13

Konstrukcja:

Przeciwwaga



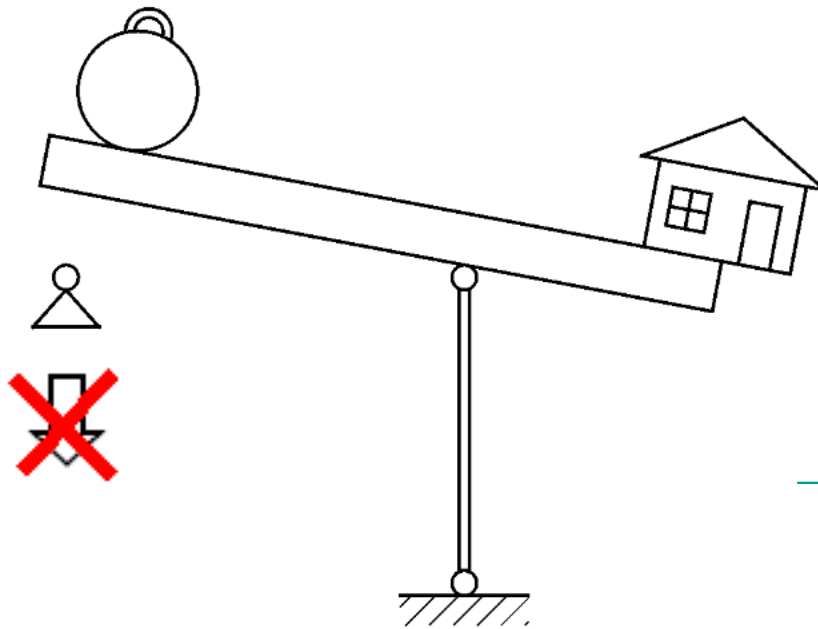
Najważniejsza część

Podpora jednostronna



Rys: Autor

Rys: Autor



Brak deformacji i zniszczeń, jedynie niebezpieczne dla ludzi lub konstrukcji przemieszczenie konstrukcji jako ciała sztywnego: EQU

→ #3 / 14

Rys: malaysiaconstructionsservices.com



Obrót, przesunięcie lub uniesienie pustego zbiornika przez parcie wiatru;

Stateczność muru oporowego;

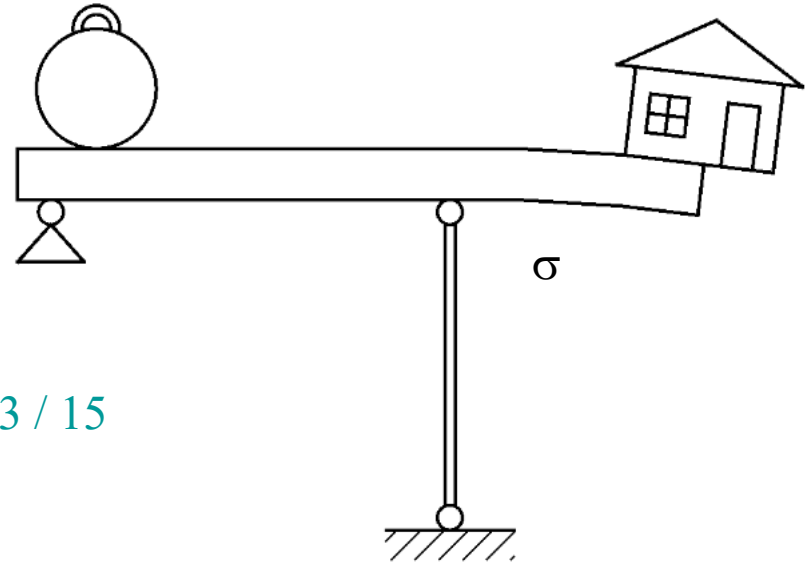
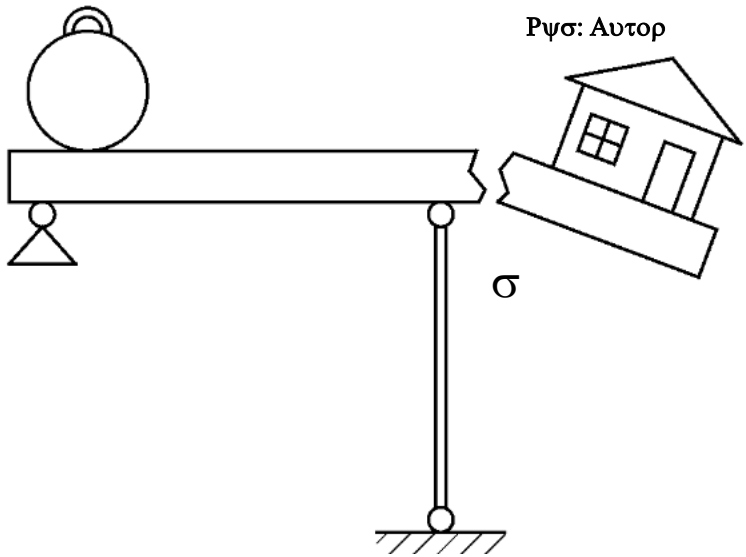
Stateczność dźwigu;

Rys: craneaccidents.com

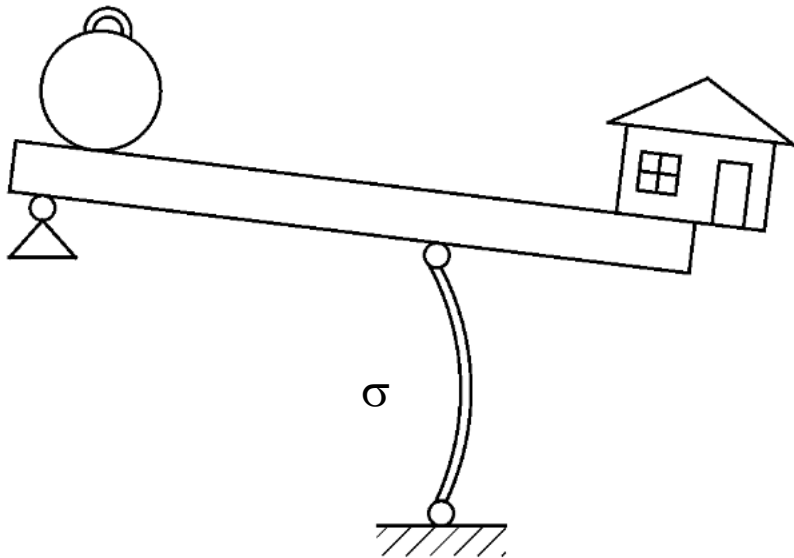


Рψσ: λινκ.σπρινγερ.χομ

Ρψσ: Αυτορ



→ #3 / 15



Sytuacja niebezpieczna dla ludzi lub konstrukcji: STR LS

- przekroczenie naprężeń ($\sigma > f_y$)
- przekroczenie odkształceń ($\sigma < f_y$)
- niestateczność; ($\sigma < f_y$)

Wzory – różne poziomy zdefiniowania zagadnienia

Na poziomie punktu:

$$T_{\sigma} = \begin{matrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{matrix} \rightarrow \#3 / 74$$

$$\sigma_{\text{HMH}} = \sqrt{[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{22} \sigma_{33} + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2)]}$$

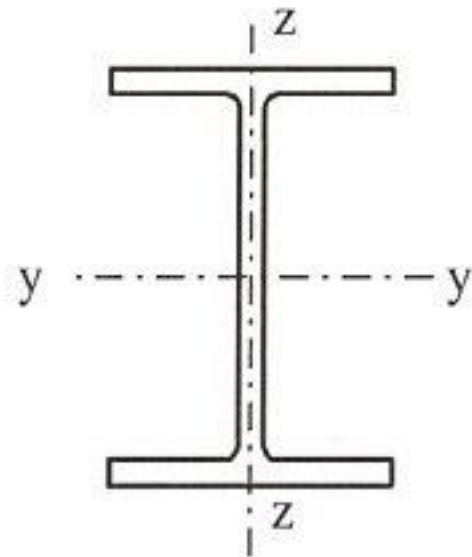
$$\sigma_{\text{HMH}} / f_y \leq 1,0$$

$$\sigma_{\text{HMH}} = \sqrt{[\sigma^2 + 3(\tau_1^2 + \tau_2^2)]}$$

Nośność spoin

Nośność powłok, obliczenia zmęczeniowe, nośność belek podsuwnicowych (II stopień)

Na poziomie przekroju:



→ #3 / 75

F – charakterystyka geometryczna

$$R = F f_y$$

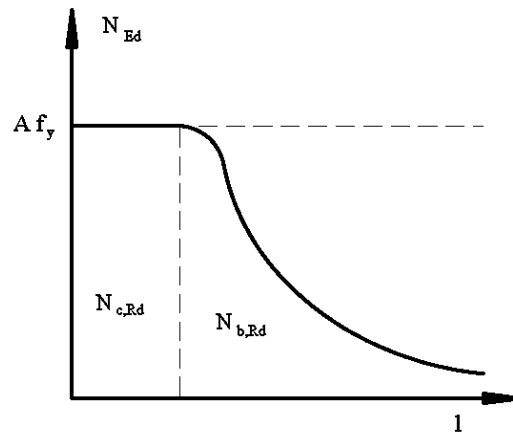
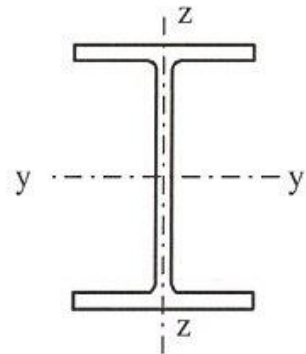
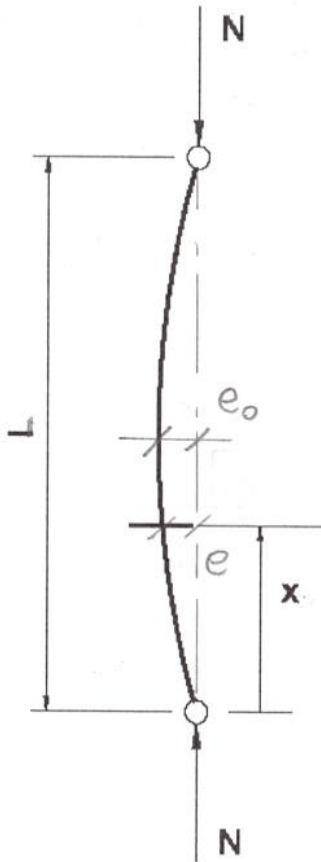
$$E / R \leq 1,0$$

Elementy i węzły, gdy zagadnienie stateczności nie jest istotne; śruby, nity, sworznie

Rys: Autor

Na poziomie elementu:

→ #3 / 76



Rys: Autor

F – charakterystyka geometryczna
 χ – współczynnik stateczności (zależy od długości elementu i sposobu podparcia)

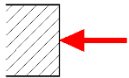
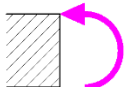
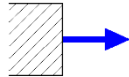
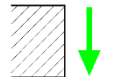
$$R = \chi F f_y$$

$$E / R \leq 1,0$$

Węzły i elementy w warunkach utraty stateczności

Obliczanie nośności

Stal - różne wzory dla różnych klas przekroju

Obciążenie	I klasa	II klasa	III klasa	IV klasa
	$N_{Ed} / N_{c,Rd (1-3)} \leq 1,0$			$N_{Ed} / N_{c,Rd (4)} \leq 1,0$
	$M_{Ed (1)} / M_{Rd (1-2)} \leq 1,0$	$M_{Ed} / M_{Rd (1-2)} \leq 1,0$	$M_{Ed} / M_{Rd (3)} \leq 1,0$	$M_{Ed} / M_{Rd (4)} \leq 1,0$
	$N_{Ed} / N_{t,Rd} \leq 1,0$			
	$V_{Ed} / V_{Rd (1-3)} \leq 1,0$			$V_{Ed} / V_{Rd (4)} \leq 1,0$

→ #4 / 83

Rys: Autor

$$N_{c,Rd(1-3)} = A f_y / \gamma_{M0}$$

$$N_{c,Rd(4)} = A_{eff} f_y / \gamma_{M0}$$

→ #4 / 88

$$M_{Rd(1-2)} = W_{pl} f_y / \gamma_{M0}$$

$$M_{Rd(3)} = W_{el} f_y / \gamma_{M0}$$

$$M_{Rd(4)} = W_{eff} f_y / \gamma_{M0}$$

$$V_{Rd(1-3)} = A_v f_y / (\gamma_{M0} \sqrt{3})$$

$V_{Rd(4)}$ = lokalna utrata stateczności + nieliniowa zależność między $M_{Rd(4)}$ i $N_{c,Rd(4)}$

$$N_{t,Rd} = A f_y / \gamma_{M0}$$

Utrata stateczności w budownictwie



Wyboczenie szyn na skutek wydłużenia termicznego (STR LS)

Rys: tti.tamu.edu

Wyboczenie stalowych kratownic (STR LS)

Rys: ascelibrary.org



Wyboczenie skrętno-giętne stężeń (STR LS)



Rys: failuremechanisms.wordpress.com

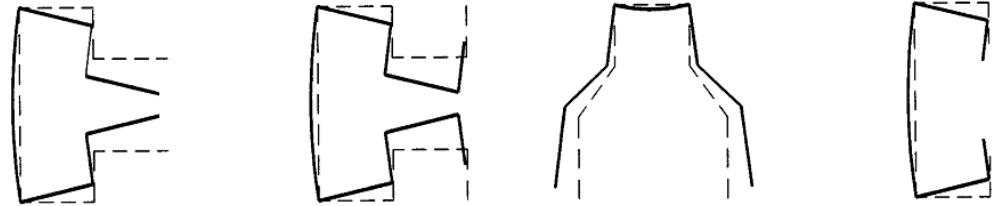
Zwichrzenie (STR LS)



Rys: civildigital.com



Dystorsja elementów zimnogiętych (STR LS)



Rys: helpstud2.norod.ru



Lokalna utrata stateczności pólki słupa stalowego (STR LS)

Rys: tatasteelconstruction.com

Utrata stateczności powłoki stalowej (silos; II stopień studiów) (STR LS)



Rys: publish.ucc.ie



Niestateczność globalna ciała sztywnego (EQU LS)

Rys: craneaccidents.com

Wyboczenie słupa żelbetowego (STR LS)

Rys: scedc.caltech.edu





Niestateczność położenia
LS EQU

Niestateczność

„Klasyczna”
niestateczność
LS STR

Konstrukcje powłokowe (II stopień studiów)



Rys: publish.ucc.ie

Konstrukcje prętowe

Niestateczność
lokalna (wyk #12)

Niestateczność jest efektem
ściskania, czasem ścinania, nigdy
rozciągania.

Niestateczność
globalna (wyk #5)

Cztery typy niestateczności lokalnej:

Dwa rodzaje od naprężeni ściskajacych.



Rys: Saliba, N. Gardner, L. Experimental study of the shear response of lean duplex stainless steel plate girders. Engineering Structures. 1 / 2013



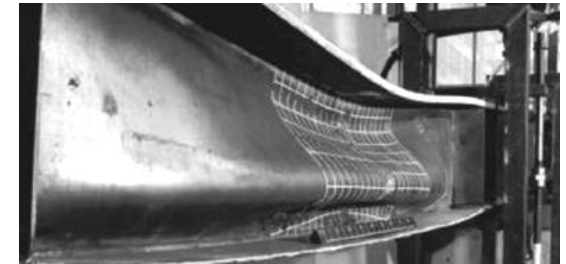
Rys: Web Buckling of High Strength Steel Plate Girders Induced by Bending Curvature, S. Nascimento, J. Pedro, A. Biscaya, Wiley Online Library, 9 III 2020



Efekt naprężeń ścinających.

Rys: Saliba, N. Gardner, L. Experimental study of the shear response of lean duplex stainless steel plate girders. Engineering Structures. 1 / 2013

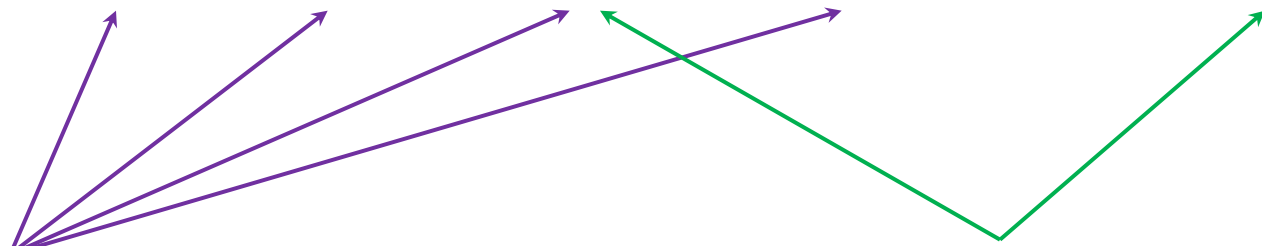
Efekt siły poprzecznej.



Rys: Local Web Buckling in Tapered Composite Beams - A Parametric Study, R. Hobbs, P. Vellasco, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences 23-4/2001

Niestateczność globalna

Rodzaj:	Wyboczenie			Dystorsja	Zwichrzenie
	gięte	skrętne	giętno-skrętne		
Przyczyna:	$N_{Ed, c}$				M_{Ed}
Oś elementu:	wygięta	prosta	wygięta	prosta	wygięta
Rotacja przekrojów:	nie	tak	tak	nie	tak
Deplanacja przekrojów	nie	tak	tak	nie	tak
Deformacja przekrojów	nie	nie	nie	tak	nie



Taka sama przyczyna, różne odpowiedzi elementu

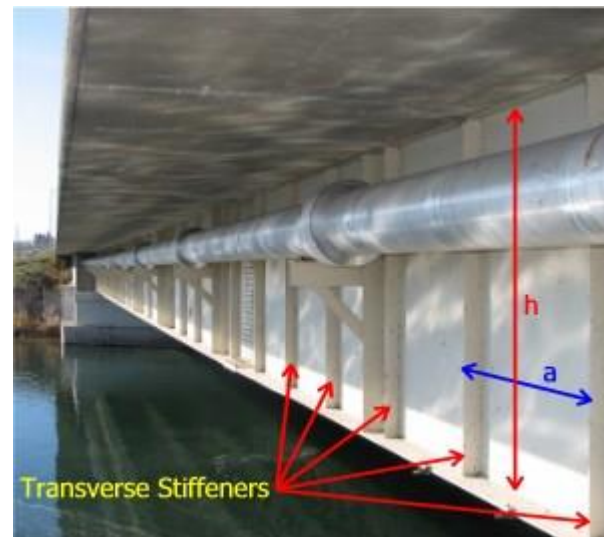
Taka sama odpowiedź elementu, różne przyczyny

Możemy zmniejszyć wpływ niestateczności globalnej przez zastosowanie stężeń. Różne typy niestateczności wymagają różnych rozwiązań technicznych stężeń. Więcej informacji podane będzie na wykładzie #10.

Możemy zmniejszyć wpływ niestateczności lokalnej przez zastosowanie żeber. Więcej informacji podane będzie na wykładzie #21.



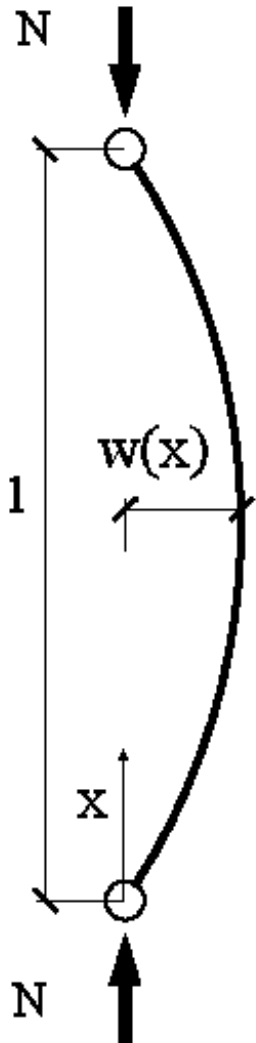
Rys: steelconstruction.info



Rys: bgstructuralengineering.com

Wyboczenie giętnie

Wzory zgodnie z Wytrzymałością materiałów:



Rys: Autor

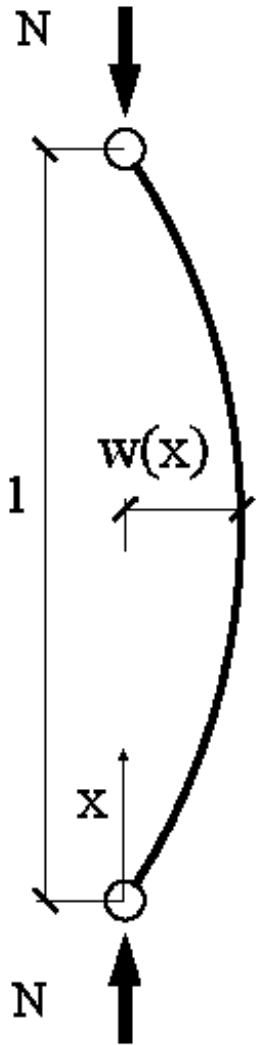
$$M(x) = N w(x)$$

$$d[w(x)]^2 / dx^2 = -M(x) / EJ \rightarrow M(x) = -w''(x) E J$$

$$-w''(x) E J = N w(x)$$

$$w''(x) = -k^2 w(x)$$

$$k = \sqrt{N / EJ}$$



$$w''(x) = -k^2 w(x)$$

$$w(x) = W_1 \sin(kx) + W_2 \cos(kx)$$

$$w(0) = 0 \rightarrow W_2 = 0$$

$$w(l) = 0 \rightarrow W_1 = 0 \text{ lub } \sin(kl) = 0$$

$$\sin(kl) = 0 \rightarrow kl = n\pi$$

$$k = \sqrt{N/EJ}$$

$$l \sqrt{N/EJ} = n\pi$$

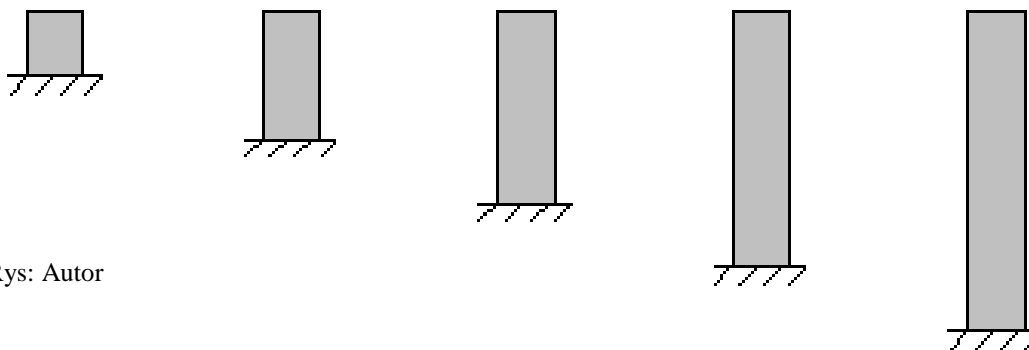
$$N/EJ = (n\pi/l)^2$$

$$N_{cr} = (n\pi/l)^2 EJ$$

$W_1 = ?$ (nie jest istotne – ważne jest zapobieganie wyboczeniu, a nie liczenie jego amplitudy)

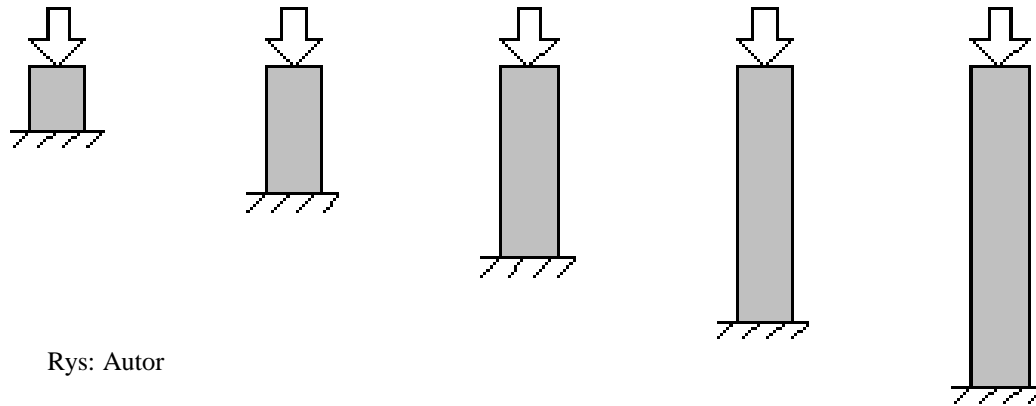
Rys: Autor

Eksperyment - takie same przekroje prętów, ale różna długość



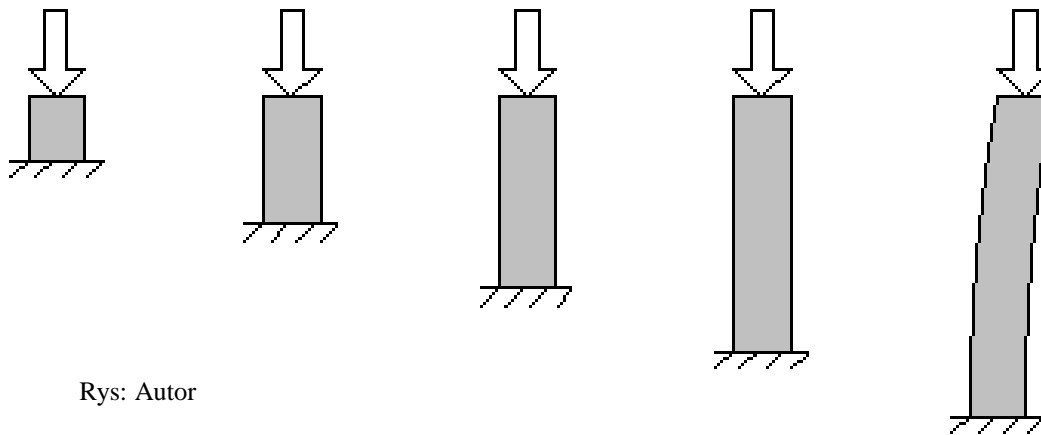
Rys: Autor

$$P_0 = 0$$



Rys: Autor

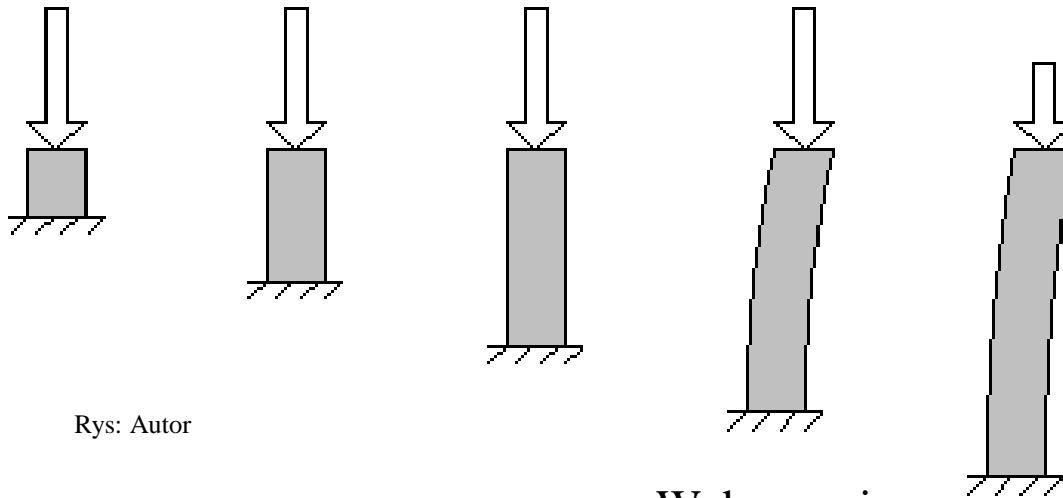
$$P_1 \neq 0$$



Rys: Autor

Wyboczenie

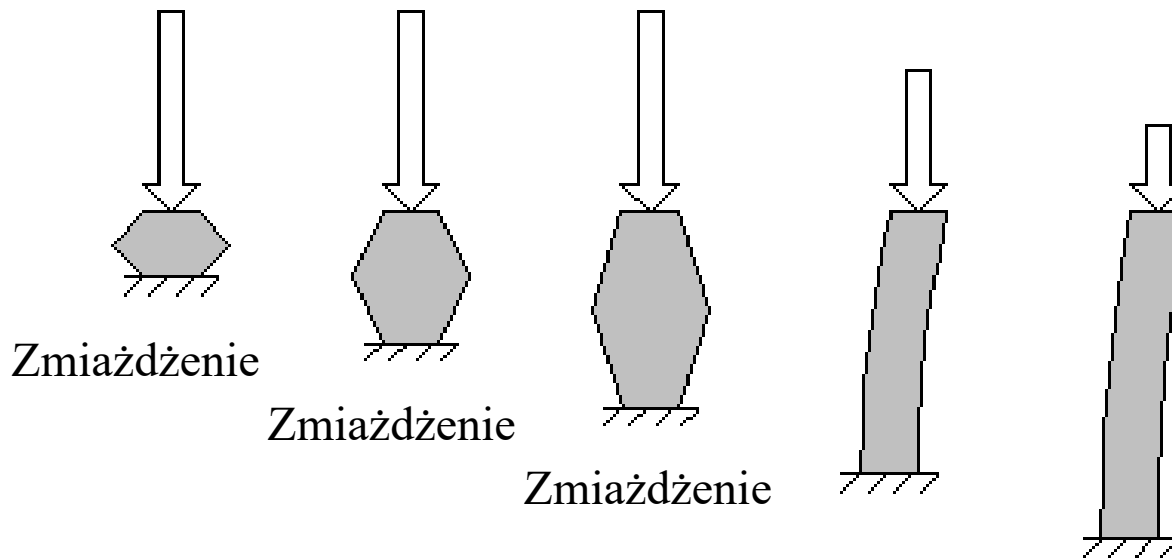
$$P_2 = P_1 + \Delta P$$



Rys: Autor

Wyboczenie

$$P_3 = P_2 + \Delta P$$



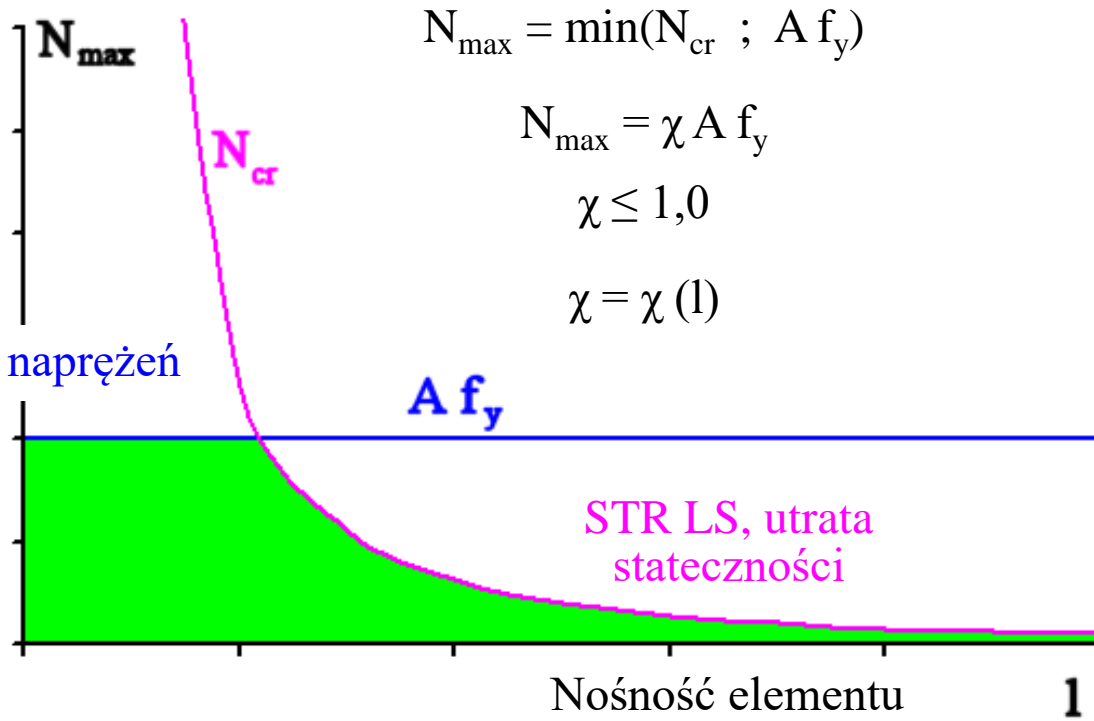
Rys: Autor

$$P_4 = P_3 + \Delta P$$

Wnioski:

Długie pręty: $N_{\max} = N_{\text{cr}} = \theta / l^2$

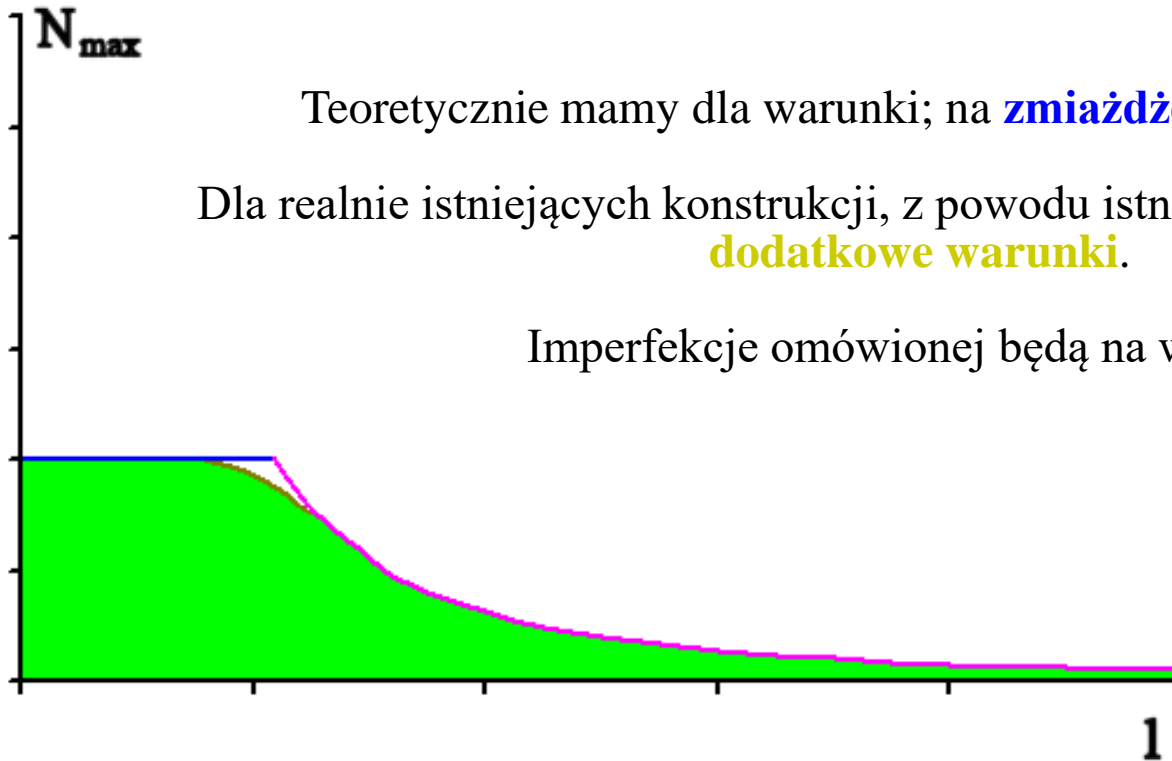
Krótkie pręty: $N_{\max} = A f_y$



Nośność elementu taka sama jak nośność przekroju

Nośność elementu mniejsza niż nośność przekroju

Rys: Autor



Teoretycznie mamy dla warunki; na **zmiażdżenie** i **wyboczenie**.

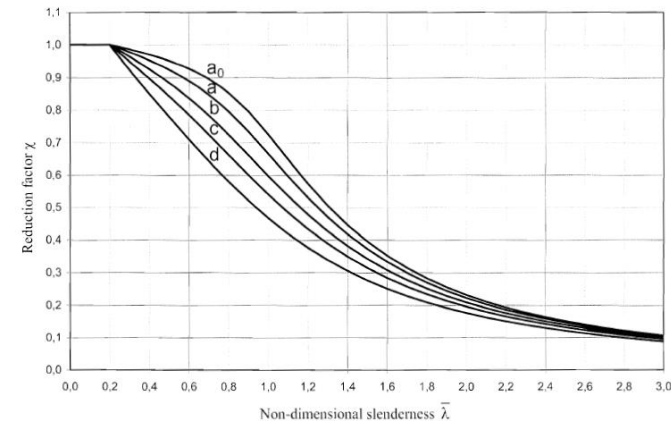
Dla realnie istniejących konstrukcji, z powodu istnienia imperfekcji, mamy **dodatkowe warunki**.

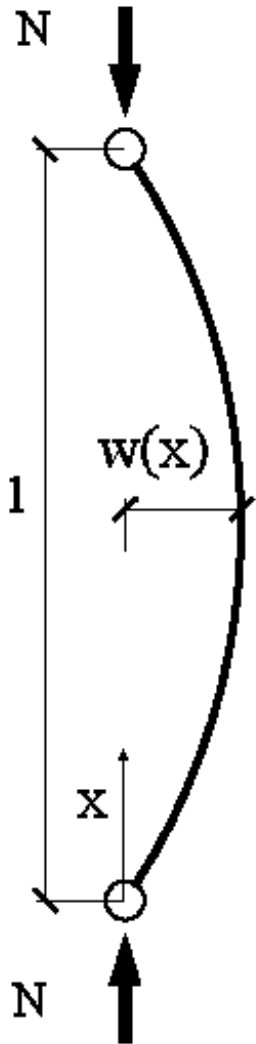
Imperfekcje omówionej będą na wyk. #6

Rys: Autor

Rys: EN 1993-1-1 fig. 6.4

W Eurokodzie podano 5 krzywych wyboczeniowych:





Rys: Autor

Uogólnienie:

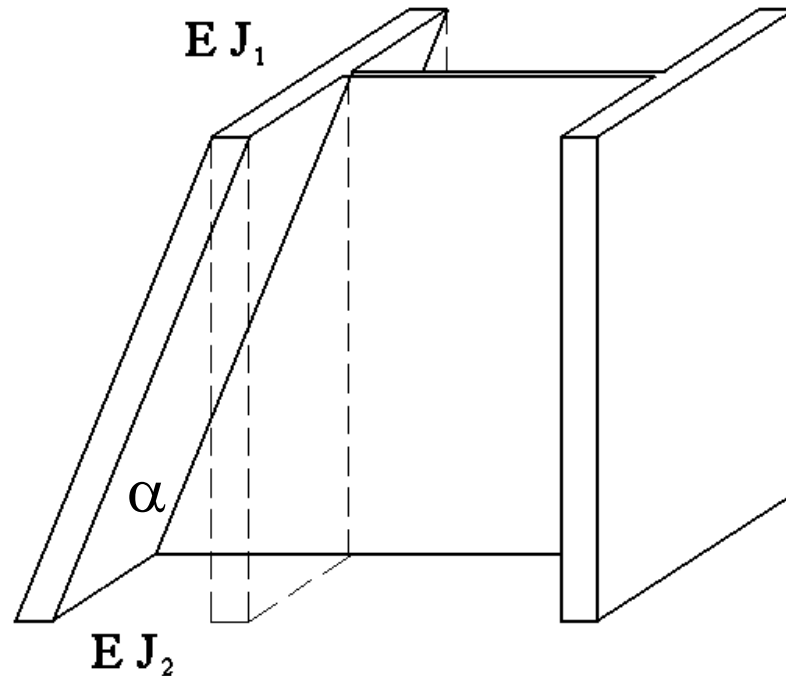
Wzory wyprowadzono dla założeń jak poniżej:

1. $EJ = \text{const}$ (co jeśli nie? \rightarrow #t / 31)
2. $N = \text{const}$ (co jeśli nie? \rightarrow #t / 32)
3. Dwa przeguby (co jeśli nie? \rightarrow #t / 33-35)
4. Siła przyłożona w środku ciężkości (co jeśli nie? \rightarrow #t / 36)
5. Prosta oś pręta (co jeśli nie? \rightarrow #t / 36)

1. Przypadek $EJ = \text{const}$ jest najczęściej spotykany w konstrukcjach stalowych. Jeśli kąt zbieżności $\alpha \leq 10^\circ$, można pominąć fakt zmiany przekroju i do obliczeń przyjąć $EJ = \min(EJ_1; EJ_2)$. Jeśli kąt $\alpha > 10^\circ$, konieczne stają się dodatkowe obliczenia. Więcej informacji przedstawione będzie na wyk. #12



Rys: borga.pl



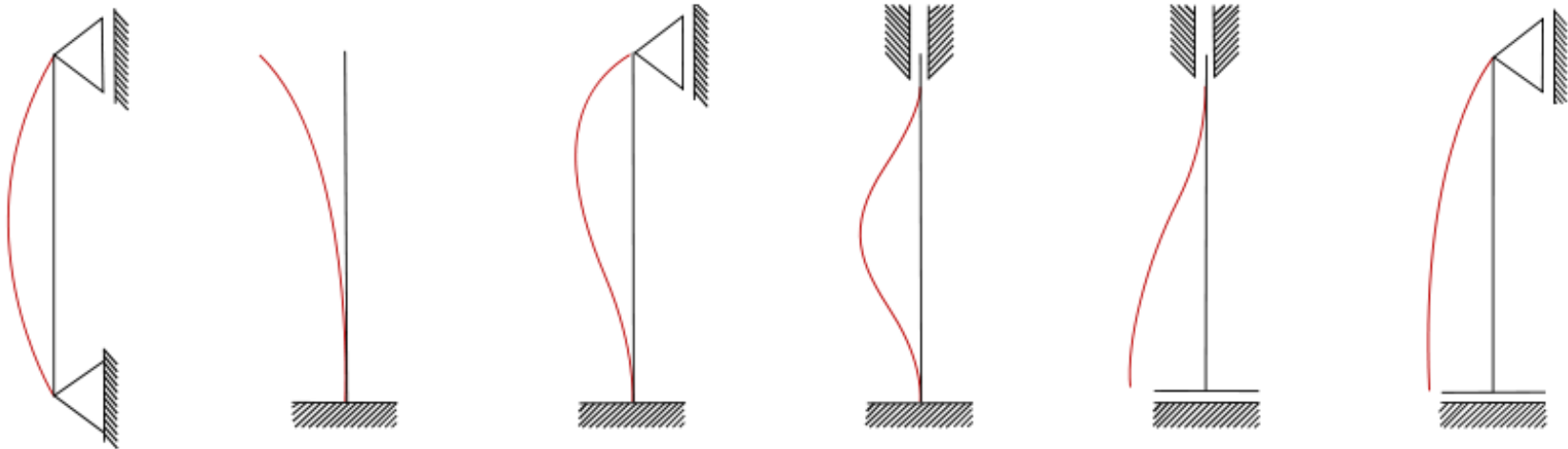
Rys: Autor

2. Zmiany siły osiowej N_{Ed} po długości elementu są pomijalnie małe. Dla obliczeń przyjmuje się $N_{Ed} = \max(N_{Ed1} ; N_{Ed2})$.



Rys: Autor

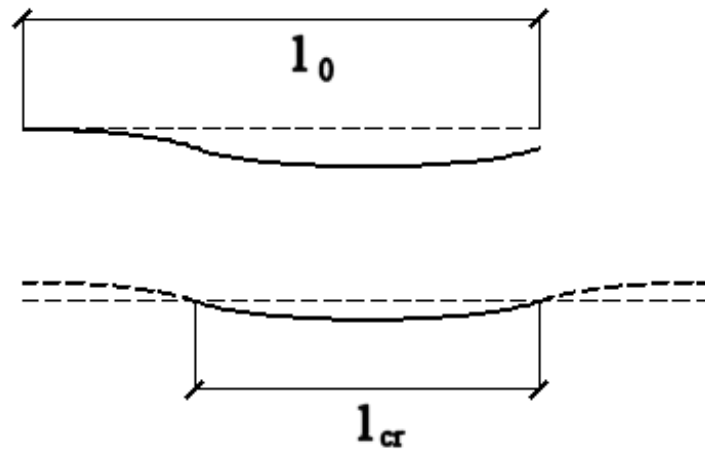
3. Jeśli, zamiast dwu przegubów, element podparty jest inaczej, ma on inną postać utraty stateczności:



Rys: wikipedia

Pojęcie długości wyboczeniowej wprowadzono dla wygodnego porównania różnych postaci wyboczenia.

Długość wyboczeniowa l_{cr} – teoretyczna długość jednej fali sinusoidy, jaką można wskazać na kształcie wyboczonego elementu.

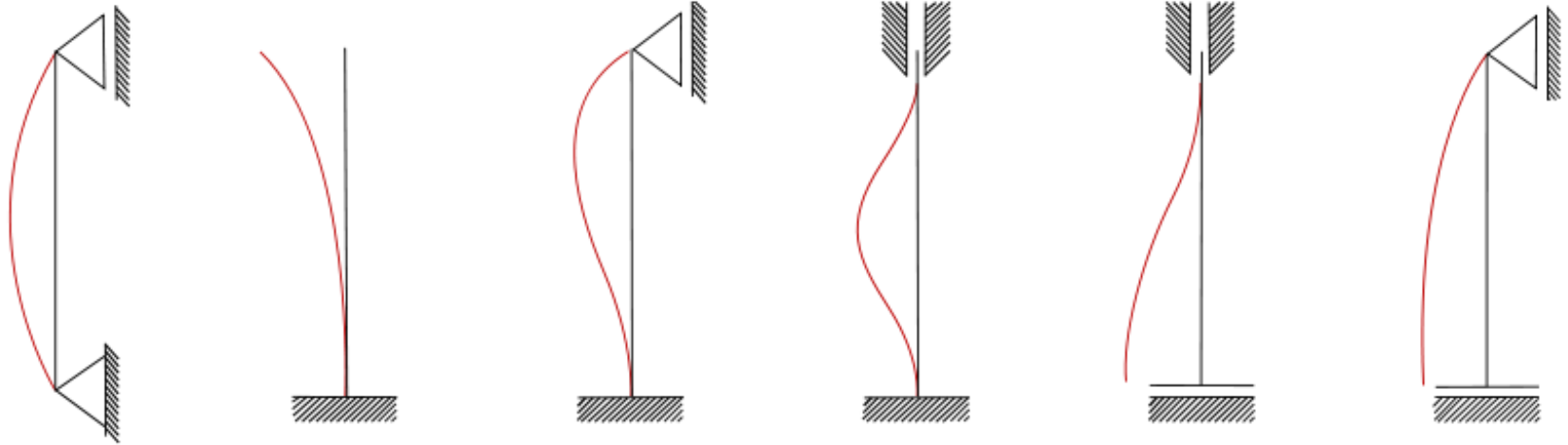


Rys: Autor

Współczynnik długości wyboczeniowej $\mu = l_{cr} / l_0$

Z różnymi sposobami podparcia związane są różne współczynniki długości wybozeniowej i różne długości wybozeniowe:

Rys: wikipedia



μ	1,0	2,0	0,7	0,5	1,0	2,0
l_{cr}	$1,0 l_0$	$2,0 l_0$	$0,7 l_0$	$0,5 l_0$	$1,0 l_0$	$2,0 l_0$

Wniosek: różne rodzaje podparcia są istotnym czynnikiem przy liczeniu wybożenia :

$$N_{cr} = \pi^2 EJ / (\mu l_0)^2$$

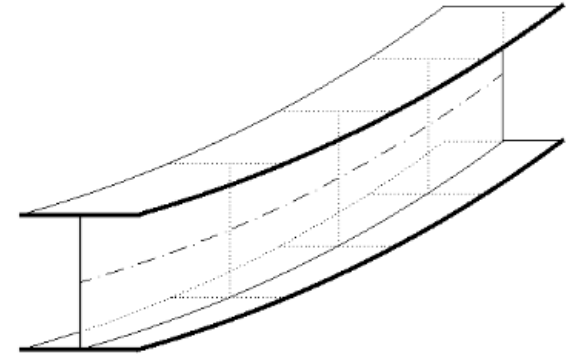
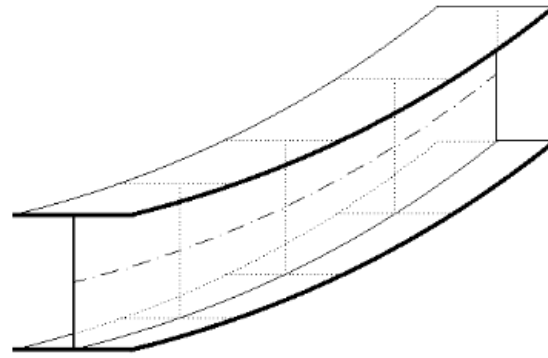
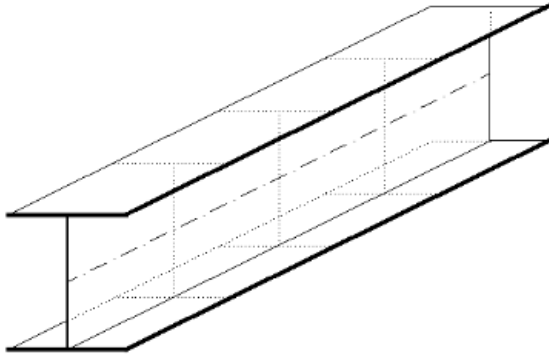
4. Siła poza środkiem ciężkości → mimośród → równocześnie siła osiowa i moment zginający
→ interakcja różnych form utraty stateczności będzie omawiana na wykładzie #13

5.a. Krzywa oś pręta → wpływ imperfekcji → Odmienne krzywe wyboczeniowe → #t / 29

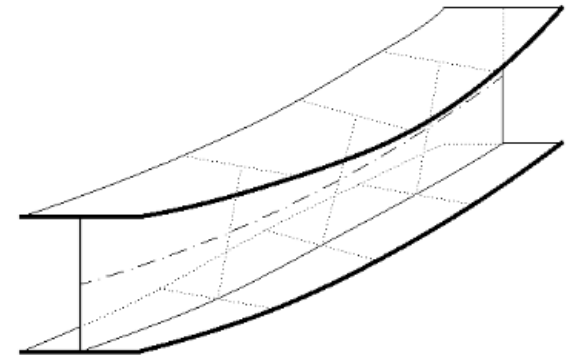
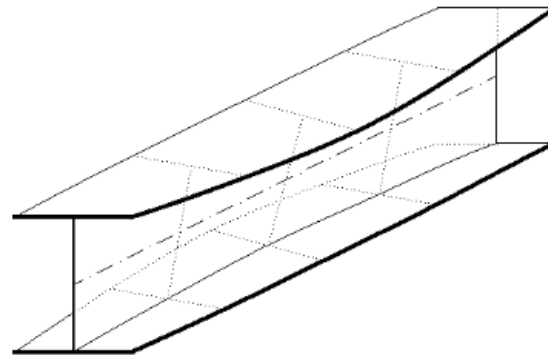
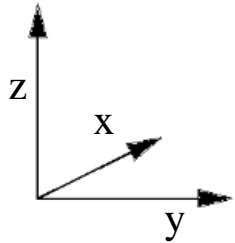
5.b. Krzywa oś pręta → łuk → stateczność łuków → Mechanika budowli

Postaci wyboczenia

Wyboczenie giętnie (względem osi y lub z)



Sytuacja początkowa



Wyboczenie skrętne

Wyboczenie skrętno-giętne

Rys: Autor

Zmiana położenia środkowej części elementu w przypadku różnych postaci utraty stateczności:



Rys: Autor

Wyboczenie			
Giętnie		Skrotne	Giętno-skrotne
J_y	J_z	J_w J_t	J_z J_w J_t

Rys: Autor

Wyboczenie względem osi y → przesunięcie równoległe do osi z

Wyboczenie względem osi z → przesunięcie równoległe do osi y

Wzory (zgodnie z Wytrzymałością materiałów):

Wyboczenie giętnie względem osi y $N_{cr, y} = \pi^2 EJ_y / (\mu_y l_{0y})^2$

Wyboczenie giętnie względem osi z $N_{cr, z} = \pi^2 EJ_z / (\mu_z l_{0z})^2$

Wyboczenie skrętne $N_{cr, T} = [\pi^2 EJ_w / (\mu_T l_{0T})^2 + GJ_t] / i_s^2$

Wyboczenie giętno-skrętne $N_{cr, z-T} = \{N_{cr, z} + N_{cr, T} - \sqrt{[(N_{cr, z} + N_{cr, T})^2 - 4 N_{cr, z} N_{cr, T} \xi]} \} / (2 \xi)$

$$\xi = 1 - (\mu z_s^2 / i_s^2)$$

$$\mu = \min[\sqrt{(\mu_z / \mu_T)} ; \sqrt{(\mu_T / \mu_z)}]$$

$$i_0 = \sqrt{(i_y^2 + i_z^2)}$$

$$i_s = \sqrt{(i_0^2 + z_s^2)}$$

z_s - odległość między środkiem ciężkości i środkiem skręcania ($z_s \geq 0$)

J_y, J_z – momenty bezwładności

i_y, i_z – promienie bezwładności

E, G – moduły Younga i Kirchhoffa

J_t - moment bezwładności przy skręcaniu

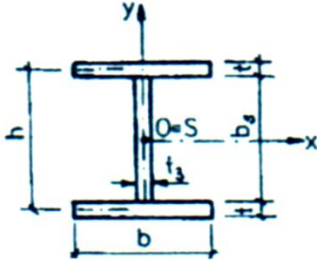
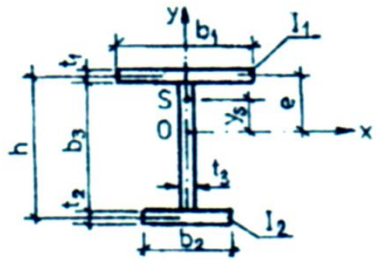
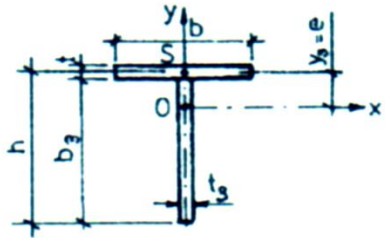
J_w - wycinkowy moment bezwładności

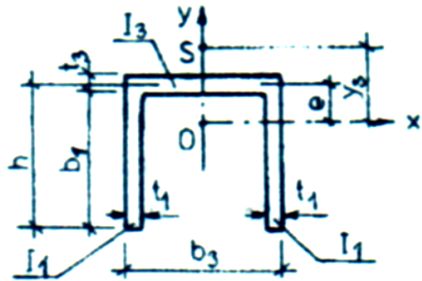
Charakterystyki geometryczne podane są w tablicach przekrojów:

Designation Bezeichnung	axe forte y-y strong axis y-y starke Achse y-y					axe faible z-z weak axis z-z schwache Achse z-z					pure bending y-y pure compression						HISTAR		
	G kg/m	I_y cm ⁴	$W_{el,y}$ cm ³	$W_{pl,y}^{\uparrow}$ cm ³	i_y cm	A_{vz} cm ²	I_z cm ⁴	$W_{el,z}$ cm ³	$W_{pl,z}^{\uparrow}$ cm ³	i_z cm	s_s mm	I_t cm ⁴	$I_w \times 10^{-3}$ cm ⁶	S 235	S 355	S 460		S 235	S 355
IPE A 100	6.9	141.2	28.81	32.98	4.01	4.44	13.12	4.77	7.54	1.22	21.20	0.77	0.28	1	1	-	1	1	-
IPE 100	8.1	171.0	34.20	39.41	4.07	5.08	15.92	5.79	9.15	1.24	23.70	1.2	0.35	1	1	-	1	1	-
IPE A 120	8.7	257.4	43.77	49.87	4.83	5.41	22.39	7.00	10.98	1.42	22.20	1.04	0.71	1	1	-	1	1	-
IPE 120	10.4	317.8	52.96	60.73	4.90	6.31	27.67	8.65	13.58	1.45	25.20	1.74	0.89	1	1	-	1	1	-
IPE A 140	10.5	434.9	63.30	71.60	5.70	6.21	36.42	9.98	15.52	1.65	23.20	1.36	1.58	1	1	-	1	2	-
IPE 140	12.9	541.2	77.32	88.34	5.74	7.64	44.92	12.31	19.25	1.65	26.70	2.45	1.98	1	1	-	1	1	-

Rys: europrofil.lu

W razie potrzeby można użyć wzorów przybliżonych:

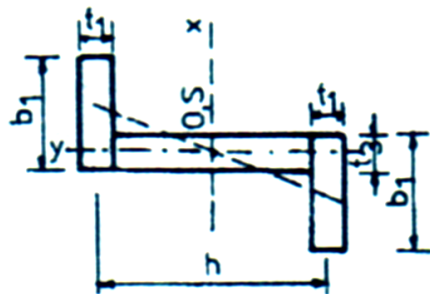
Przekrój	Cechy geometryczne
	$y_s = 0$ $I_\omega = \frac{I_y h^2}{4}$ $I_T = \frac{1}{3} (2 b t^3 + b_3 t_3^3)$ $r_x = 0$
	$y_s = \frac{1}{I_y} [e I_1 - (h - e) I_2] = e - \frac{I_2}{I_y} h$ $I_\omega = \frac{I_1 I_2 h^2}{I_1 + I_2}$ $I_T = \frac{1}{3} (b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3 + b_3 t_3^3)$ $r_x = \frac{1}{I_x} [y_s I_y + b_1 t_1 e^3 - b_2 t_2 (h - e)^3 + \frac{t_3}{4} [e^4 - (h - e)^4]]$
	$y_s = e$ $I_\omega = 0$ $I_T = \frac{1}{3} (b t^3 + b_3 t_3^3)$ $r_x = \frac{1}{I_x} [e I_y + b t e^3 + \frac{t_3}{4} [e^4 - (h - e)^4]]$



$$y_s = e + \frac{I_1 h}{I_y}$$

$$I_{\omega} = \frac{h^2}{3} \cdot \frac{I_1^2 + 2 I_1 I_3}{I_y}$$

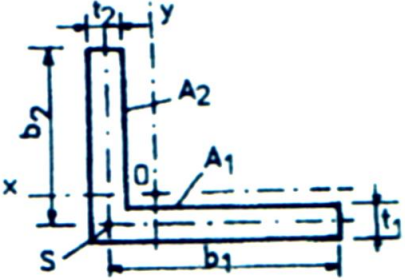
$$I_T = \frac{1}{3} (2 b_1 t_1^3 + b_3 t_3^3)$$



$$y_s = 0$$

$$I_{\omega} = \frac{h^2}{4} I_y$$


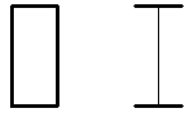
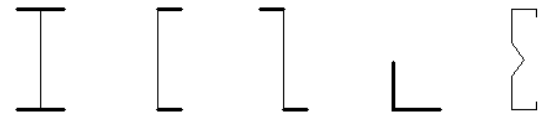
$$I_T = \frac{1}{3} (2 b_1 t_1^3 + h t_3^3)$$

Przekrój	Cechy geometryczne
	$y_s = e_y - \frac{t}{2}$ $I_{\omega} = \frac{A_1^3 + A_2^3}{36}$ $I_r = \frac{1}{3} (b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3)$
Oznaczenia:	
<p> O — środek ciężkości S — środek ścinania I_1 I_2 (I_3) — momenty bezwładności pól (średnika) względem osi symetrii I_y — moment bezwładności figury względem osi symetrii </p>	

J. Żmuda, „Podstawy projektowania konstrukcji metalowych”, TiT Opole 1992

Wynikiem obliczeń jest współczynnik wyboczeniowy χ .

Liczony jest w różny sposób dla różnych przekrojów.

Wyboczenie		
Giętne		Giętne, skrętne, giętno-skrętne
	 (dwuteowniki gorąco walcowane)	 (dwuteowniki spawane)
$\chi = \chi_y = \chi_z$ (tylko gdy $l_{cr,y} = l_{cr,z}$)	$\chi = \min(\chi_y ; \chi_z)$	$\chi = \min(\chi_y ; \chi_z ; \chi_T ; \chi_{z,T})$

Rys: Autor

Algorytm

EN 1993-1-1 6.3.1

<p>Wyboczenie giętkie (I, II, III klasa przekroju)</p>	$\lambda = (l_{cr} / i) (1 / \lambda_1)$ $\lambda_1 = 93,9 \varepsilon$	$\Phi = [1 + \alpha (\lambda - 0,2) + \lambda^2] / 2$ $\alpha \rightarrow \text{EN 1993-1-1, tab. 6.1, 6.2}$	$\chi = \min\{1/[\Phi + \sqrt{(\Phi^2 - \lambda^2)}] ; 1,0\}$
<p>Pozostałe przypadki wyboczenia</p>	$\lambda = \sqrt{(A_{(eff)} f_y / N_{cr})}$		

$$\lambda \leq 0,2 \rightarrow \chi = 1,0$$

Tablica 6.2: Przyporządkowanie krzywych wybočenja

Rodzaj elementu i typ przekroju		Ograniczenia	Wybočenje względem osi	Krzywa wybočenja	
				S 235 S 275 S 355 S 420	S 460
Dwuteowniki walcowane		$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	a	a_0
				b	a_0
		$40 \text{ mm} < t_f \leq 100$	y-y z-z	b	a
				c	a
$h/b \leq 1,2$	y-y z-z	b	a		
		c	a		
$h/b > 1,2$	y-y z-z	d	c		
		c	c		
Dwuteowniki spawane		$t_f \leq 40 \text{ mm}$	y-y z-z	b	b
		c	c		
		$t_f > 40 \text{ mm}$	y-y z-z	c	c
		d	d		
Kształtowniki rurowe		wykończone na gorąco	dowolna	a	a_0
		wykończone na zimno	dowolna	c	c

Tablica 6.1: Parametry imperfekcji krzywych wybočenja

Krzywa wybočenja	a_0	a	b	c	d
Parametr imperfekcji α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

Rys: EN 1993-1-1, 6.1

Przykład 1

C 300p

S235 $\rightarrow f_y = 235$ MPa

$L = 3,00$ m

$E = 210$ GPa

$G = 81$ GPa

$A = 52,5$ cm²

$J_y = 7640$ cm⁴

$J_z = 473$ cm⁴

$J_w = 66\,500$ cm⁶

$J_T = 33,9$ cm⁴

$a = 3,12$ cm

$e = 2,89$ cm

$i_y = 12,1$ cm

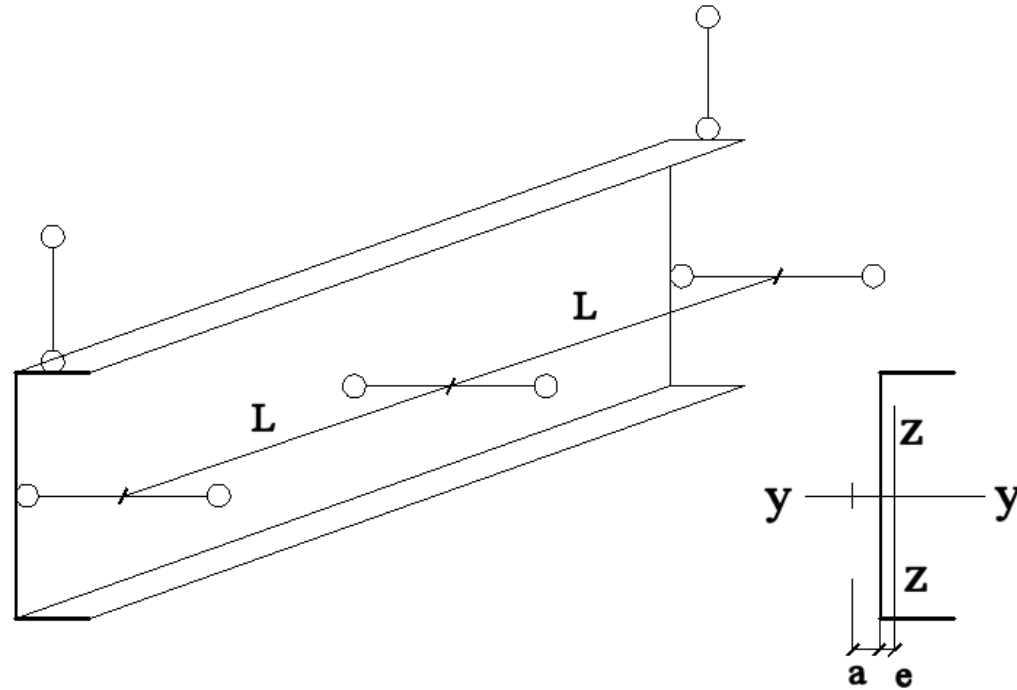
$i_z = 3,01$ cm

$y_s = a + e = 6,01$ cm

tutaj:

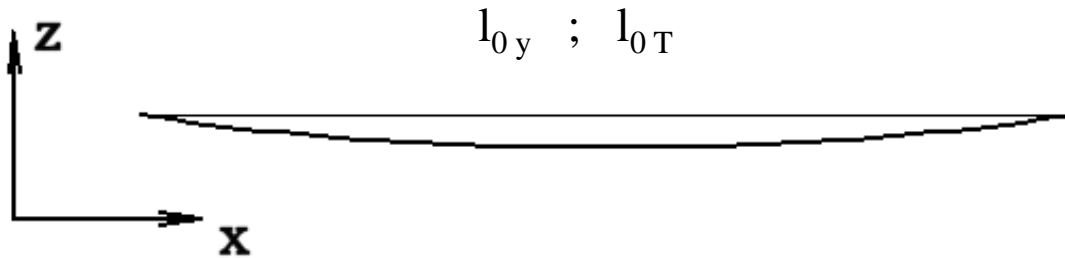
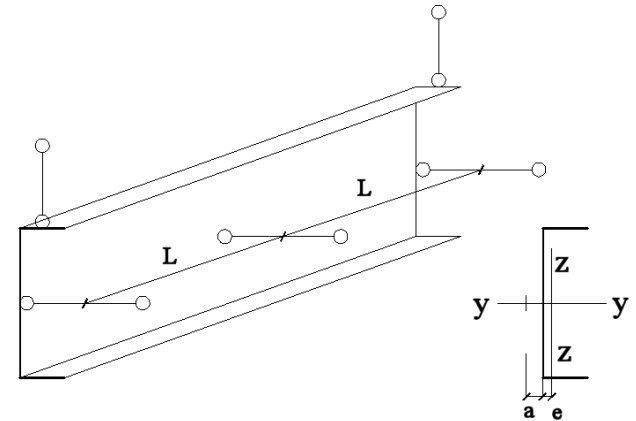
$z_s = y_s = 6,01$ cm

$N_{Ed} = 650$ kN



Rys: Autor

Podpory i postaci utraty stateczności:



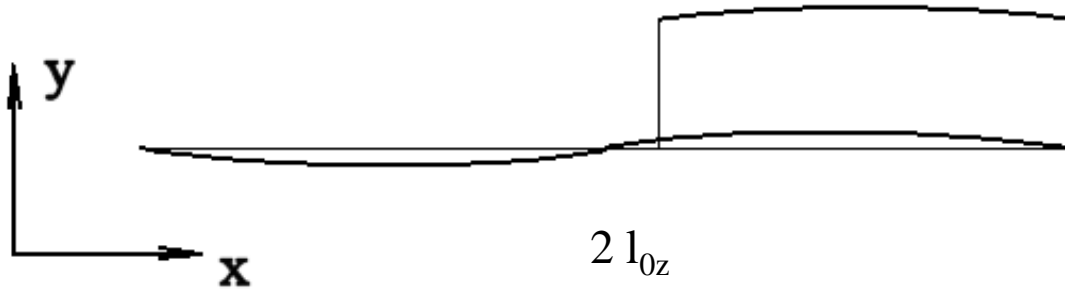
$$y = 6,00 \text{ m}$$

$$z = 3,00 \text{ m}$$

$$T = 6,00 \text{ m}$$

Rys: Autor

$$\mu_z l_{0z}$$



$$y = 1,00$$

$$z = 0,90-1,00 \text{ (przyjęto } 1,0)$$

$$\Gamma = 1,00$$

$$N_{cr, y} = \pi^2 EJ_y / (\mu_y l_{0y})^2 = \pi^2 210 \text{ GPa} \cdot 7640 \text{ cm}^4 / (1,0 \cdot 6,00 \text{ m})^2 = \underline{4\,398,554 \text{ kN}}$$

$$N_{cr, z} = \pi^2 EJ_z / (\mu_z l_{0z})^2 = \pi^2 210 \text{ GPa} \cdot 473 \text{ cm}^4 / (1,00 \cdot 3,00 \text{ m})^2 = \underline{1\,089,211 \text{ kN}}$$

$$i_0 = \sqrt{(i_y^2 + i_z^2)} = 12,47 \text{ cm}$$

$$i_s = \sqrt{(i_0^2 + z_s^2)} = 13,84 \text{ cm}$$

$$N_{cr, T} = [\pi^2 EJ_w / (\mu_T l_{0T})^2 + GJ_t] / i_s^2 =$$

$$= [\pi^2 210 \text{ GPa} \cdot 66\,500 \text{ cm}^6 / (1,0 \cdot 6,00 \text{ m})^2 + 81 \text{ GPa} \cdot 33,9 \text{ cm}^4] / (13,84 \text{ cm})^2 = \underline{1\,633,427 \text{ kN}}$$

$$\mu = \min[\sqrt{(\mu_z / \mu_T)} ; \sqrt{(\mu_T / \mu_z)}] = 0,975$$

$$\xi = 1 - (\mu z_s^2 / i_s^2) = 0,816$$

$$N_{cr, zT} = \{N_{cr, z} + N_{cr, T} - \sqrt{[(N_{cr, z} + N_{cr, T})^2 - 4 N_{cr, z} N_{cr, T} \xi]}\} / (2 \xi) =$$

$$= \{1\,206,953 \text{ kN} + 1\,633,427 \text{ kN} +$$

$$- \sqrt{[(1\,089,211 \text{ kN} + 1\,633,427 \text{ kN})^2 - 4 \cdot 1\,089,211 \text{ kN} \cdot 1\,633,427 \text{ kN} \cdot 0,816]}\} / (2 \cdot 0,816) =$$

$$= \underline{888,974 \text{ kN}}$$

$$A f_y = 1\,233,750 \text{ kN}$$

$$\lambda_y = \sqrt{(A f_y / N_{cr, y})} = 0,530$$

$$\lambda_z = \sqrt{(A f_y / N_{cr, z})} = 1,064$$

$$\lambda_T = \sqrt{(A f_y / N_{cr, T})} = 0,869$$

$$\lambda_{zT} = \sqrt{(A f_y / N_{cr, zT})} = 1,178$$

C 300p \rightarrow tab. 6.1, 6.2, EN 1993-1-1 $\rightarrow \alpha_y = \alpha_z = \alpha_T = \alpha_{zT} = 0,49$

$$\Phi_y = [1 + \alpha_y (\lambda_y - 0,2) + \lambda_y^2] / 2 = 0,721$$

$$\Phi_z = [1 + \alpha_z (\lambda_z - 0,2) + \lambda_z^2] / 2 = 1,278$$

$$\Phi_T = [1 + \alpha_T (\lambda_T - 0,2) + \lambda_T^2] / 2 = 1,041$$

$$\Phi_{zT} = [1 + \alpha_{zT} (\lambda_{zT} - 0,2) + \lambda_{zT}^2] / 2 = 1,435$$

$$\chi_y = \min\{1/[\Phi_y + \sqrt{(\Phi_y^2 - \lambda_y^2)}]; 1,0\} = 0,827$$

$$\chi_z = \min\{1/[\Phi_z + \sqrt{(\Phi_z^2 - \lambda_z^2)}]; 1,0\} = 0,504$$

$$\chi_T = \min\{1/[\Phi_T + \sqrt{(\Phi_T^2 - \lambda_T^2)}]; 1,0\} = 0,619$$

$$\chi_{zT} = \min\{1/[\Phi_{zT} + \sqrt{(\Phi_{zT}^2 - \lambda_{zT}^2)}]; 1,0\} = 0,444$$

$$\chi = \min(\chi_y ; \chi_z ; \chi_T ; \chi_{zT}) = 0,444$$

$$A f_y = 1\,233,750 \text{ kN}$$

$$\chi A f_y = 574,928 \text{ kN}$$

$$N_{Ed} = 650 \text{ kN}$$

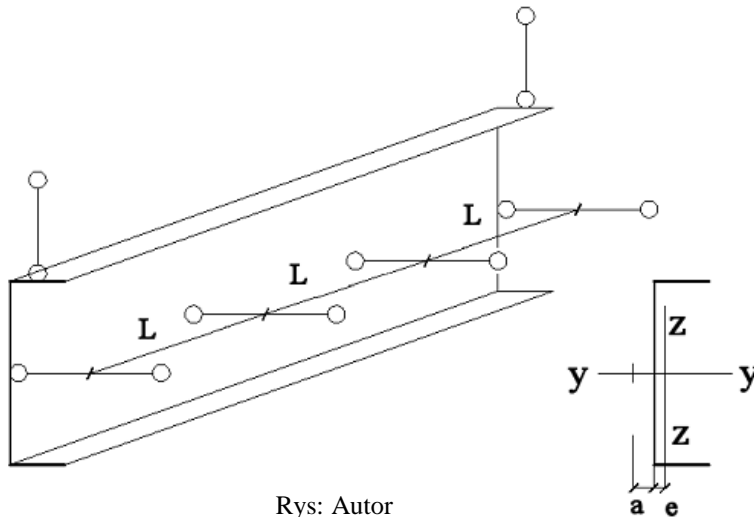
$$N_{Ed} / A f_y = 0,527$$

OK.

$$N_{Ed} / \chi A f_y = 1,118$$

Źle, wyboczenie, zniszczenie elementu!

Propozycja: dodatkowa podpora w kierunku osi y → zmiana długości wyboczeniowej przy wyboczeniu względem słabszej osi z



Rys: Autor

$$L_{0z} = 2,00 \text{ m}$$

$$N_{cr, y} = \underline{4\,398,554 \text{ kN}}$$

$$N_{cr, z} = \underline{2\,450,725 \text{ kN}}$$

$$N_{cr, T} = \underline{1\,633,427 \text{ kN}}$$

$$N_{cr, zT} = \underline{1\,333,190 \text{ kN}}$$

$$\lambda_y = \sqrt{(A f_y / N_{cr, y})} = 0,530$$

$$\lambda_z = \sqrt{(A f_y / N_{cr, z})} = 0,710$$

$$\lambda_T = \sqrt{(A f_y / N_{cr, T})} = 0,869$$

$$\lambda_{zT} = \sqrt{(A f_y / N_{cr, zT})} = 0,962$$

$$\chi = \min(\chi_y ; \chi_z ; \chi_T ; \chi_{zT}) = 0,562$$

$$A f_y = 1\,233,750 \text{ kN}$$

$$\chi A f_y = 693,930 \text{ kN}$$

$$N_{Ed} = 650 \text{ kN}$$

$$N_{Ed} / A f_y = 0,567$$

OK.

$$N_{Ed} / \chi A f_y = 0,944$$

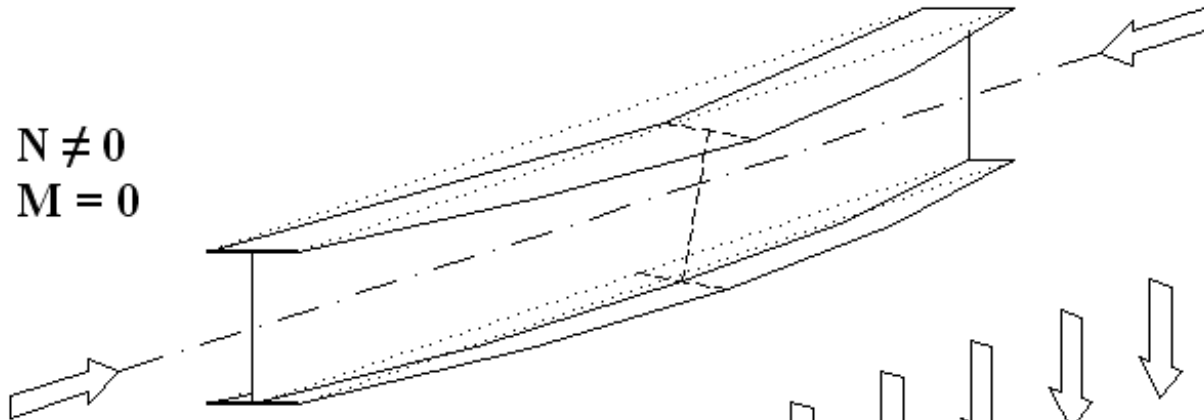
OK.

Zwicherungie

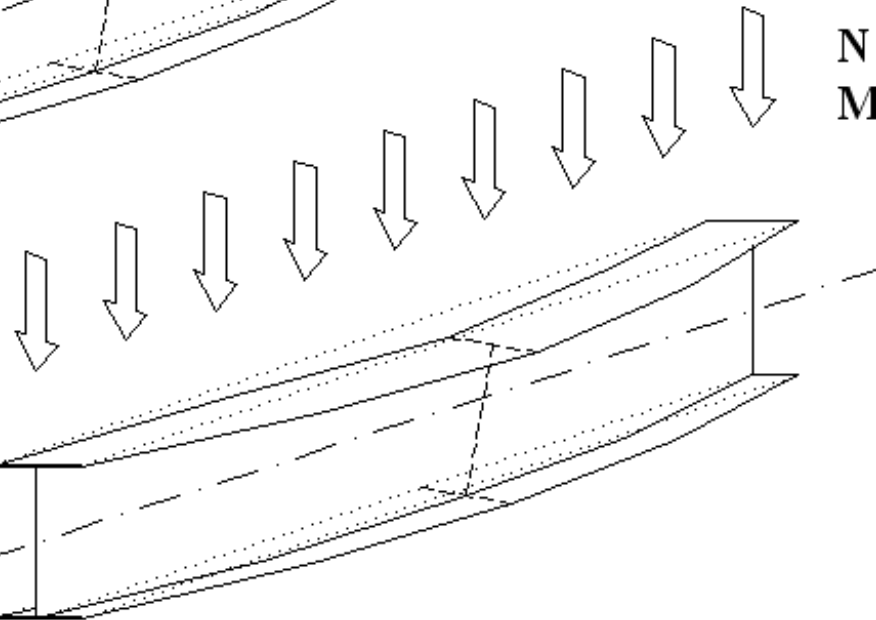
Rys: Autor

Wyboczenie giętno-skrętne i zwicherungie - wygląd
odkształceń elementu

$N \neq 0$
 $M = 0$



$N = 0$
 $M \neq 0$

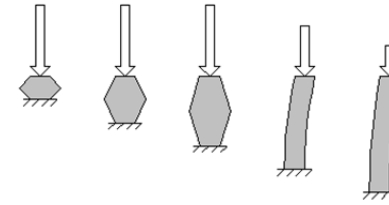


Wyboczenie giętno-skrętne

Niemal taki sam kształt
odkształceń elementu,
aczkolwiek zupełnie inne
powody

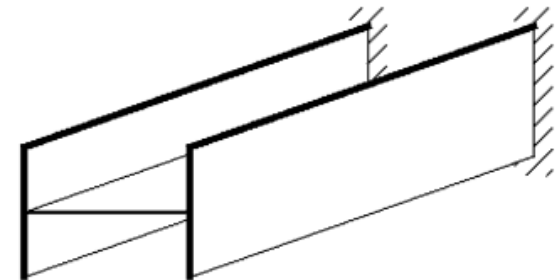
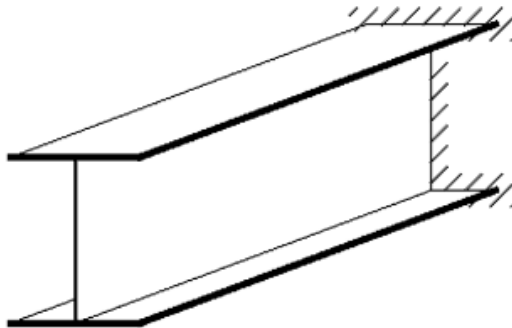
Zwicherungie

Dwa efekty od siły osiowej w zależności od smukłości.

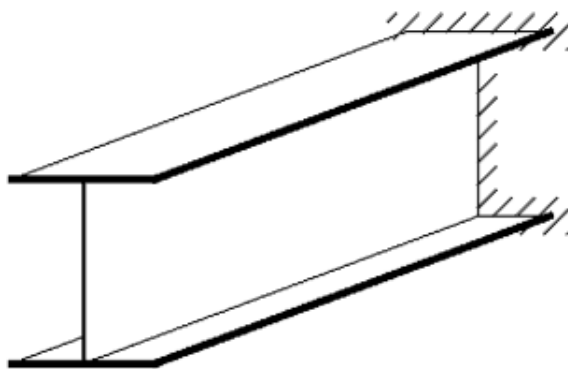


Rys: Autor

Eksperyment: co się dzieje z elementem przy zginaniu względem silnej i słabej osi?

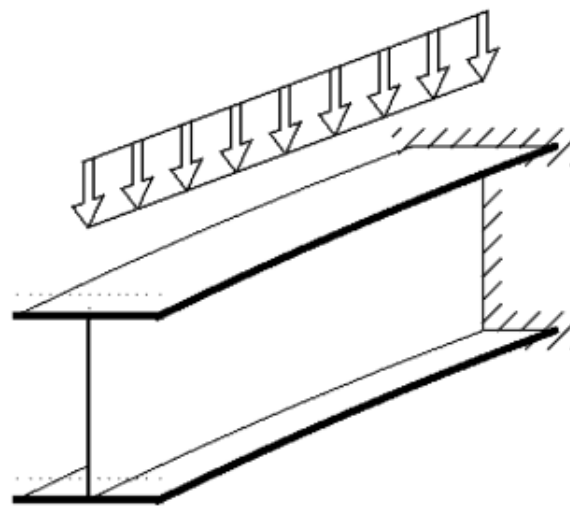


Rys: Autor



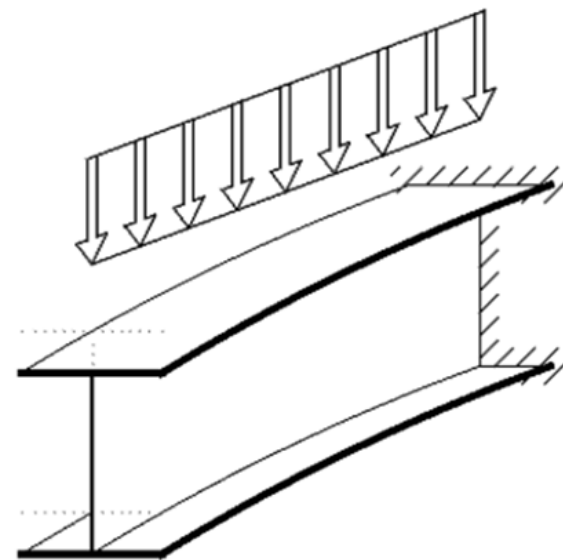
$$q_0 = 0$$

Ugięcie



$$q_1 \neq 0$$

Ugięcie



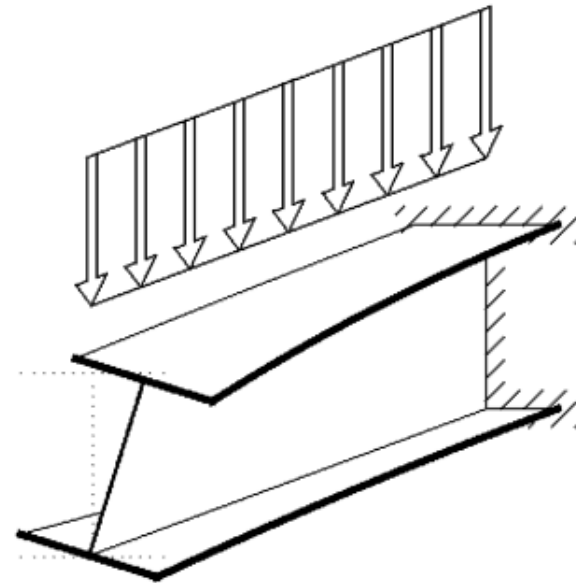
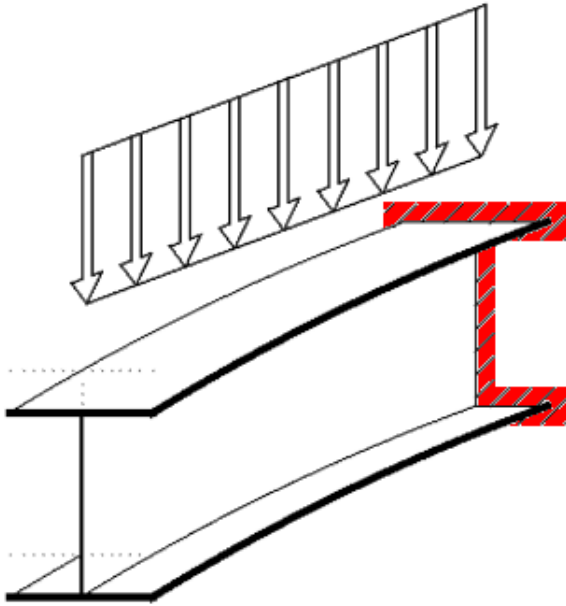
$$q_2 = q_1 + \Delta q$$

Rys: Autor

Pojawiają się dwie możliwości zniszczenia:

1. Naprężenia w utwierdzeniu = f_y → utwierdzenie zmienia się w przegub → złamanie belki w utwierdzeniu;

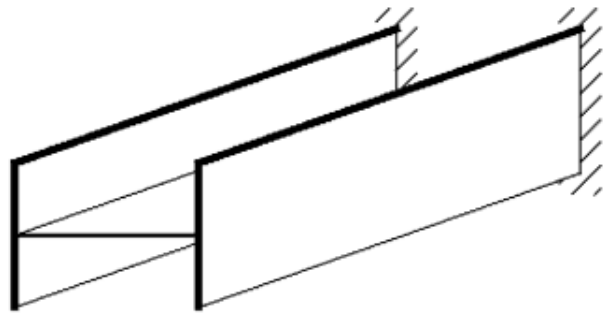
2. wyboczenie;



Rys: Autor

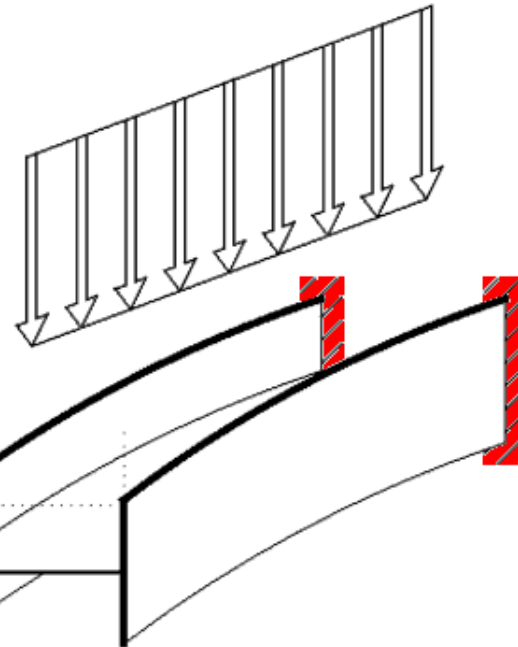
$$q_3 = q_2 + \Delta q$$

Ten sam eksperyment w przypadku zginania względem osi słabej.



$$q_0 = 0$$

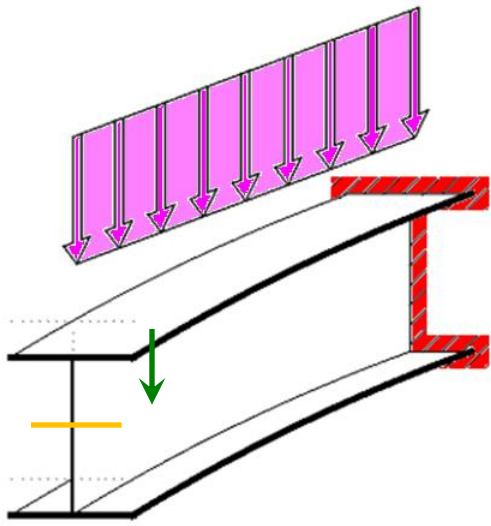
Rys: Autor



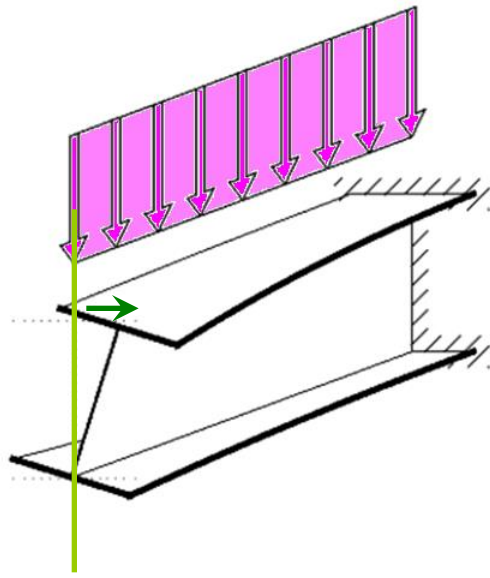
$$q_i \neq 0$$

W tej sytuacji mamy jednak tylko jedną możliwość zniszczenia – złamanie w utwierdzeniu wspornika.

Deformacja narasta w tym samym kierunku co **obciążenie**. Zginanie względem **osi silnej**, duże wyężenie materiału.

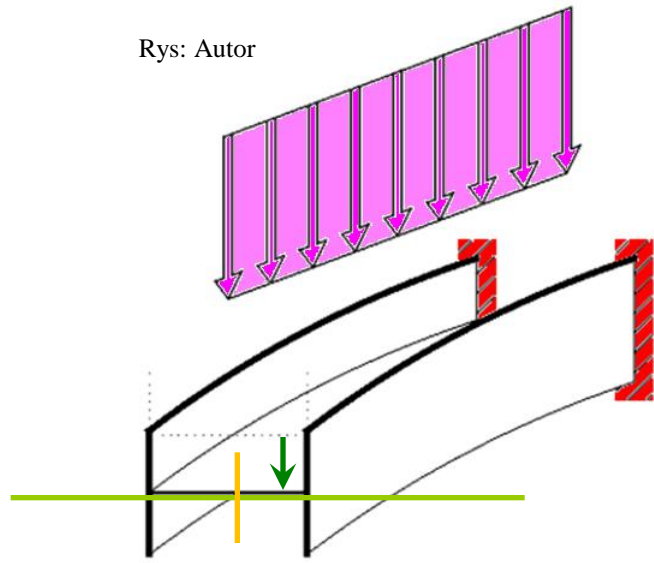


Zwichrzenie prostopadle do **obciążenia**, względem **osi słabej**, znacznie mniejsze wyężenie niż poprzednie.

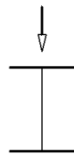


Rys: Autor

Belka „nie chce pracować” względem osi silnej, jeśli może względem osi słabej.



Deformacja narasta w tym samym kierunku co **obciążenie**. Zginanie względem **osi słabej**; z całą pewnością wyężenie jest mniejsze niż względem **osi silnej**. Zatem praca względem **osi silnej** jest w tym przypadku niemożliwa.



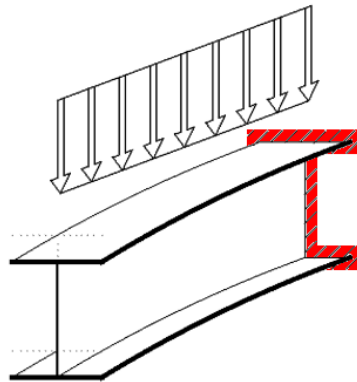
Podczas zginania względem osi silnej, dla obu kierunków deformacji mamy zbliżone wartości przyrostu energii:

- + równoległe do osi silnej
- + równoległe do osi słabej

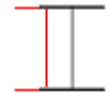
Ostateczna forma zniszczenia – złamanie w utwierdzeniu lub zwichrzenie – zależy od charakterystyk geometrycznych belki i jej długości



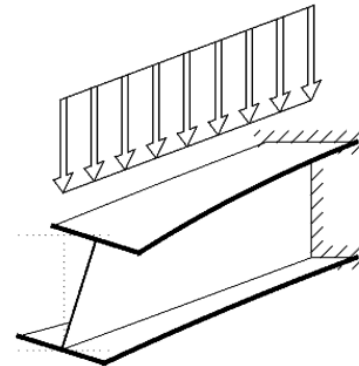
Ugięcie



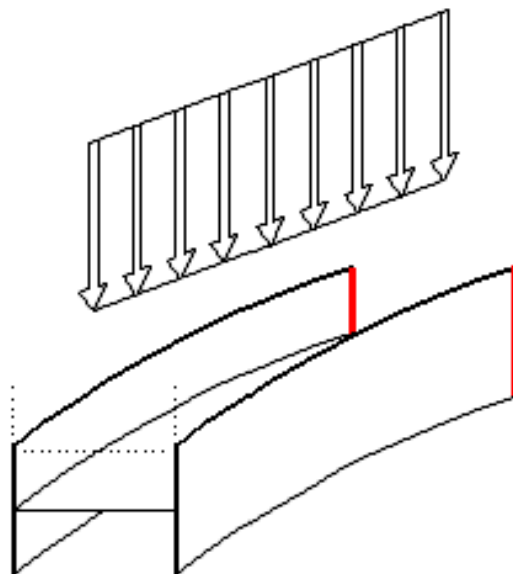
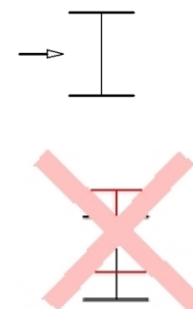
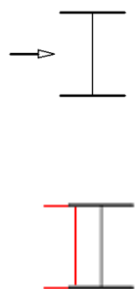
Rys: Autor



Zwichrzenie



W przypadku obciążenia równoległego do osi silnej (zginanie względem słabej), energia wewnątrz związana z odkształceniem równoległym do obciążenia jest zawsze mniejsza, niż energia odkształcenia prostopadłego do obciążenia. Ten drugi przypadek (zwichrzenie przy zginaniu względem osi słabej) nigdy nie zajdzie.



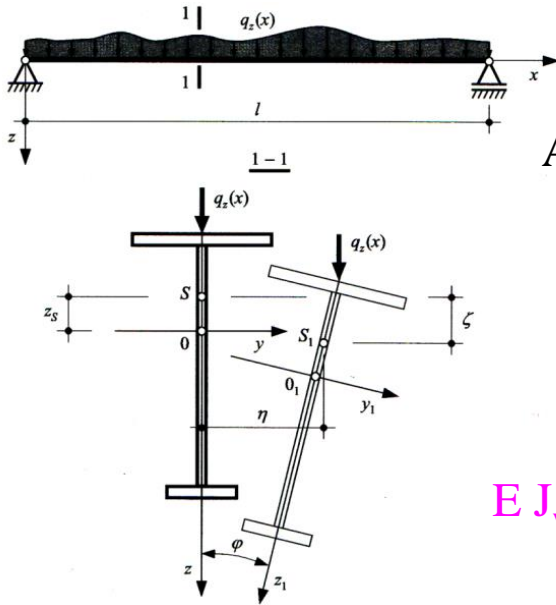
Ugięcie

Brak zwichrzenia

Rys: Autor

Konkluzje:

- zwichrzenie jest analizowane tylko w przypadku zginania względem osi silnej (→ potencjalna niestabilność względem osi słabej);
- nie ma możliwości zwichrzenia przy zginaniu względem osi słabej;
- z tych samych powodów wyboczenie giętno-skrętne jest wyłącznie interakcją między wyboczeniem giętnym względem osi słabej i wyboczeniem skrętnym;
- nie dojdzie do interakcji wyboczenia skrętnego i giętnego względem osi silnej;
- nie dojdzie do zwichrzenia, gdy $J_y = J_z \rightarrow$ rury okrągłe i kwadratowe nie są podatne na zwichrzenie;
- nie jest jasne, czy rury prostokątne ulegają zwichrzeniu (EN 1993-1-1 6.3.2.1 (2), EN 1993-1-1 tab. B1 – podlegają; wiele pozycji literatury – nie podlegają).



Analiza zwichrzenia jest bardzo skomplikowana. Zjawisko jest opisane przez **trzy równania różniczkowe**:

$$E J_z \eta'''' + (M_y \varphi)'' = 0 \quad [1]$$

$$E J_w \varphi'''' - [(2 \beta_z M_y + G J_T) \varphi']' + q_z (e_z - z_s) \varphi + M_y \eta'' = 0 \quad [2]$$

$$\beta_z = \left\{ \int_A [z (y^2 + z^2) dA] - z_s \right\} / (2 J_y) \quad [3]$$

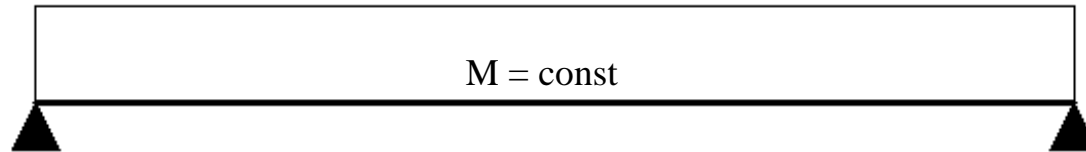
Rys: K. Rykaluk, Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych, DWE 2012

Rozwiązanie ogólne jest możliwe tylko przez całkowanie numeryczne.

Rozwiązanie analityczne („kartką i długopisem”) jest możliwe tylko po licznych uproszczeniach:

$$E J_z = \text{const} \quad ; \quad E J_w = \text{const} \quad ; \quad G J_T = \text{const} \quad ; \quad M_y = \text{const} \quad ; \quad q_z = 0 \quad ; \quad z_s = 0 \quad ; \quad \dots$$

Podobnie jak w przypadku wyboczenia, także i zwichrzenie analizowane było dla przyjętych wstępnie założeń:



1. $M = \text{const}$, 2. przekrój bisymetryczny,
3. $EJ = \text{const}$, 4. dwa przeguby, 5. obciążenie przyłożone w środku ciężkości, 6. prosta
oś pręta

$$N_{cr, z} = \pi^2 EJ_z / (\mu_z l_{0z})^2$$

$$N_{cr, T} = [\pi^2 EJ_w / (\mu_T l_{0T})^2 + GJ_t] / i_s^2$$

Rys: Autor

$$M_{cr} = i_s \sqrt{N_{cr, z} N_{cr, T}}$$

Tak samo jak dla wyboczenia, pojawia się kwestia uogólnienia tego rozwiązania:

1. $M = \text{const}$ (co jeśli nie? → #t / 67-79)
2. Przekrój bisymetryczny (co jeśli nie? → #t / 68-79)
3. $EJ = \text{const}$ (co jeśli nie? → #t / 83)
4. Dwa przeguby (co jeśli nie? → #t / 84)
5. Obciążenie w środku ścinania (co jeśli nie? → #t / 80-82)
6. Prosta oś pręta (co jeśli nie? → #t / 83)

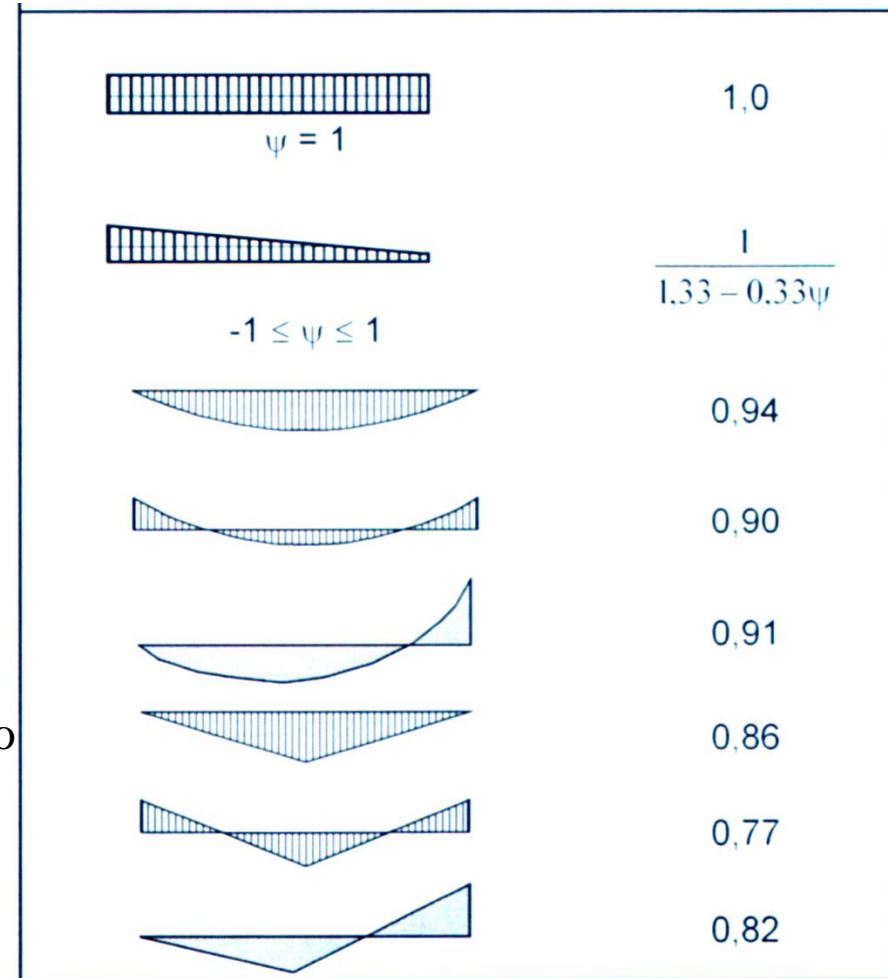
1. $M \neq \text{const} \rightarrow$ inny kształt wykresu momentów

k_c :

$$\chi_{LT, \text{mod}} = \chi_{LT} / f$$

$$f = \min \{ 1 - 0,5(1-k_c)[1 - 2(\lambda_{LT} - 0,8)^2]; 1,0 \}$$

Ten punkt jest w Eurokodzie przedstawiony niejasno. Zgodnie z EN 1993-1-1 6.3.2.2 (2), moment krytyczny M_{cr} zależy między innymi od kształtu wykresu momentów. Nie ma jednak wyjaśnienia, czy wpływ kształtu wykresu uwzględnia się **wyłącznie** przez przeliczenie wartości $\chi_{LT, \text{mod}}$. **Być może** oznacza to dodatkowo konieczność zastosowania innego wzoru na M_{cr} bardziej dopasowanego do rozkładu momentów niż wzór ze str. #t / 65.



1. $M \neq \text{const}$ (alternatywne podejścia)
lub
2. Przekrój mono- lub niesymetryczny
lub
5. Obciążenie poza środkiem ciężkości:

Przekrój bi-symetryczny jest najczęściej spotykanym przypadkiem.

Jeśli jest inny, można użyć odmiennych wzorów na M_{cr}

Na przykład: stara Polska Norma PN B 03200, załącznik 3

3. WZORY I TABLICE DO OBLICZANIA OBCIĄŻENIA KRYTYCZNEGO PRZY NIESTATECZNOŚCI GIĘTNO-SKRĘTNEJ

3.1. Cechy geometryczne przekroju (tabl. Z1-1).

I_y - moment bezwładności względem osi Y,

I_T - moment bezwładności przy skręcaniu,

I_{ω} - wycinkowy moment bezwładności,

y_s - współrzędna środka ścinania ($y_s \geq 0$),

a_0 - współrzędna punktu przyłożenia obciążenia względem środka ciężkości,

a_s - różnica współrzędnych środka ścinania i punktu przyłożenia obciążenia:

$$a_s = y_s - a_0,$$

r_x - ramię asymetrii ($r_x \leq 0$);

$$r_x = \frac{1}{I_x} \int_A y(x^2 + y^2) dA$$

b_y - parametr zginania ($b_y \geq 0$):

$$b_y = y_s - \frac{1}{2} r_x$$

$$J_z \quad J_T \quad J_W$$

$$x \rightarrow z \quad ; \quad y \rightarrow x \quad ; \quad z \rightarrow x$$

Środek ścinania (#t / 37-39,
punkt S)

Tabela Z1-1 \rightarrow rozszerzona wersja tej tabeli przedstawiona jest na slajdach #t / 41 - 43.

Podane są w niej też wartości r_x i y_s .

2. Przekrój mon- lub asymetryczny: $a_s \neq 0$; $r_x \neq 0$; $b_y \neq 0$

3.3. Momenty krytyczne przy zwichrzeniu można obliczać wg poniższych wzorów, przyjmując znak (-), gdy środek ścinania znajduje się w strefie rozciąganej przekroju lub znak (+), w pozostałych przypadkach, przy czym w przypadku przekrojów bisymetrycznych zwrot osi Y należy przyjmować przeciwnie do kierunku obciążenia poprzecznego, a przy jego braku - w stronę pasa ściskanego.

a) belka jednoprzęsłowa podparta widelkowo ($\mu_x = \mu_y = \mu_\omega = 1$) i zginania stałym momentem

$$M_{cr} = \pm b_y N_y + \sqrt{(b_y N_y)^2 + i_s^2 N_y N_z} \quad (Z1-7)$$

b) belka jak w pozycji a) o przekroju bisymetrycznym ($b_y = 0$)

$$M_{cr} = i_s \sqrt{N_y N_z} \quad (Z1-8)$$

Symbole: $N_y \rightarrow N_{cr, z}$; $N_z \rightarrow N_{cr, T}$

c) belka jednoprzęsłowa - rozwiązanie ogólne

$$M_{cr} = \pm A_0 N_y + \sqrt{(A_0 N_y)^2 + B^2 i_s^2 N_y N_z} \quad (Z1-9)$$

c) belka jednoprzęsłowa - rozwiązanie ogólne

$$M_{cr} = \pm A_0 N_y + \sqrt{(A_0 N_y)^2 + B^2 i_s^2 N_y N_z} \quad (Z1-9)$$

gdzie: $A_0 = A_1 b_y + A_2 a_s$; A_1, A_2, B - wg tabl. Z1-2;

w przypadku belki wspornikowej o przekroju bisymetrycznym przyjmuje się $\mu_y = \mu_\omega = 2$, $A_1 = 0$, a ponadto:

- przy zginaniu stałym momentem;

$$A_2 = 0; B = 1,$$

- przy obciążeniu równomiernie rozłożonym:

$$A_2 = 3,40; B = 4,10,$$

- przy sile skupionej na końcu wspornika:

$$A_2 = 1,10; B = 2,56;$$

w przypadku belki wspornikowej o przekroju bisymetrycznym przyjmuje się $\mu_y = \mu_\omega = 2$, $A_1 = 0$, a ponadto:

- przy zginaniu stałym momentem;

$$A_2 = 0; B = 1,$$

- przy obciążeniu równomiernie rozłożonym:

$$A_2 = 3,40; B = 4,10,$$

- przy sile skupionej na końcu wspornika:

$$A_2 = 1,10; B = 2,56;$$

d) belka jednoprzęsłowa o przekroju dwuteowym usztywniona bocznym stężeniem podłużnym, które wymusza położenie osi obrotu

$$M_{cr} = \frac{i_s^2 N_z + c_y^2 N_y}{C_1(c_y - b_y) + C_2(c_y - a_s)} \quad (Z1-10)$$

gdzie:

c_y - różnica współrzędnych środka ścinania i punktu przecięcia śladu płaszczyzny stężenia z osią środka; $c_y = y_s - y_c$;

C_1, C_2 - wg tabl. Z1-2;

N_z, N_y - siły krytyczne obliczone jak dla pręta bez stężenia.

P - przegub

$x \rightarrow z$; $y \rightarrow x$; $z \rightarrow x$

U - utwierdzenie

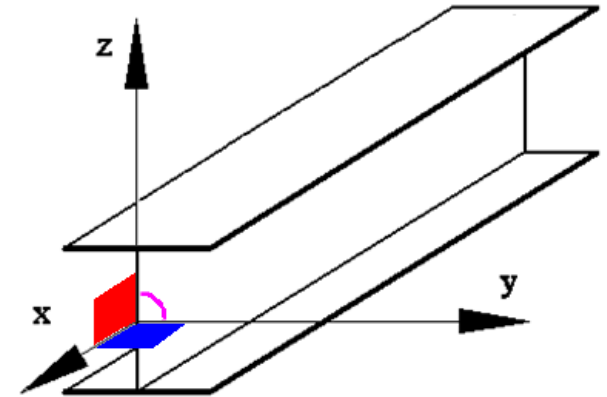
Tablica Z1-2

Obciążenie belki (w płaszczyźnie symetrii przekroju YZ)	Warunki podparcia ¹⁾				Współczynniki				
	w płaszczyźnie		μ_y	μ_ω	A_1	A_2	B	C_1	C_2
	YZ	XZ							
Moment stały ($\beta = 1$) lub zmienny liniowo ²⁾	P	P	1	1	$1/\beta$	0	$1/\beta$	2	0
	P	P	1	0,5	$1,33/\beta$	0	$1,15/\beta$	-	-
	P	U	0,5	0,5	$1/\beta$	0	$1/\beta$	2	0
Obciążenie równomiernie rozłożone	P	P	1	1	0,61	0,53	1,14	0,93	0,81
	P	P	1	0,5	1,23	0,52	1,31	-	-
	P	U	0,5	0,5	0,68	0,29	0,97	1,43	0,61
	U	U	0,5	0,5	0,27	1,61	1,88	0,15	0,91
Siła skupiona w środku rozpiętości	P	P	1	1	0,55	0,76	1,37	0,60	0,81
	P	P	1	0,5	1,07	0,87	1,46	-	-
	P	U	0,5	0,5	0,62	0,50	1,12	1	0,81
	U	U	0,5	0,5	0	1,23	1,23	0	1,62

¹⁾ P - podparcie obustronnie przegubowe (swobodne); U - obustronnie utwierdzenie;
 μ_y, μ_ω - współczynniki długości wyboczeniowej w płaszczyźnie XY i przy skręcaniu.
²⁾ Współczynnik β należy przyjmować wg tabl. 12 - poz. a).

P - przegub

U - utwierdzenie

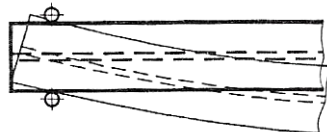
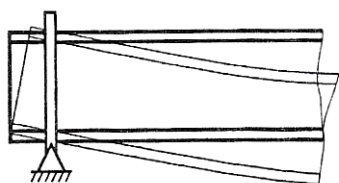
 $x \rightarrow y$; $y \rightarrow z$; $z \rightarrow x$ Podparcia muszą być takie same
na obu krańcach belki

Warunki podparcia ¹⁾			
w płaszczyźnie		μ_y	μ_ω
YZ	XZ		
P	P	1	1
P	P	1	0,5
P	U	0,5	0,5
P	P	1	1
P	P	1	0,5
P	U	0,5	0,5
U	U	0,5	0,5
P	P	1	1
P	P	1	0,5
P	U	0,5	0,5
U	U	0,5	0,5

Podparcie		Współczynnik długości krytycznej	
względem y	względem z	względem z	rotacja
P = Przegub	P = Przegub	1,0	1,0
P = Przegub	P = Przegub	1,0	0,5
P = Przegub	U = Utwierdzenie	0,5	0,5
U = Utwierdzenie	U = Utwierdzenie	0,5	0,5

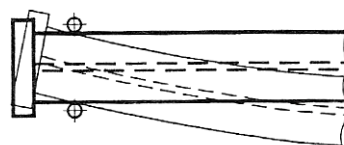
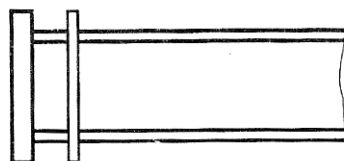
Rys: PN B-3200

Podparcie		Współczynnik długości krytycznej		Sytuacja	Komentarz
względem y	względem z	względem z	rotacja		
P = Przegub	P = Przegub	1,0	1,0	A	Przegubowe podparcie belki
P = Przegub	P = Przegub	1,0	0,5	B	Przegubowe podparcie słupa
P = Przegub	U = Utwierdzenie	0,5	0,5	C	Technicznie trudne do wykonania
U = Utwierdzenie	U = Utwierdzenie	0,5	0,5	D	Węzeł / podpora sztywna



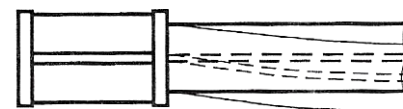
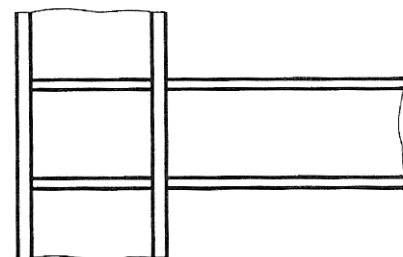
A

B



Rys: K. Rykaluk, *Konstrukcje stalowe, podstawy i elementy*, DWE Wrocław 2001

D



Inna propozycja: Access Steel

Podparcie na obu końcach:

- Brak skręcenia;
- Podparcie w kierunku bocznym;

Rys: eurocodes.jrc.ec.europa.eu

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g)^2} - C_2 z_g \right\}$$

$$k = \mu_z$$

$$k_w = \mu_T$$

Różne podpory

Table 3.2 Values of factors C_1 and C_2 for cases with transverse loading (for $k = 1$)

Loading and support conditions	Bending moment diagram	C_1	C_2
		1,127	0,454
		2,578	1,554
		1,348	0,630
		1,683	1,645

Note: the critical moment M_{cr} is calculated for the section with the maximal moment along the member

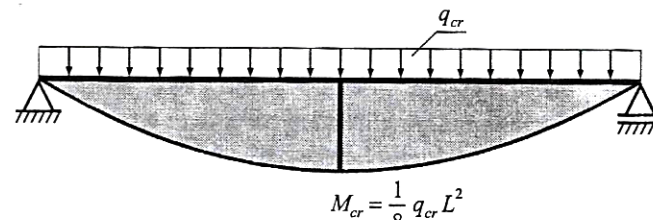
Inna propozycja: literatura (wiele-wiele różnych propozycji), przykład:

$$M_{cr} = M_{cr,0} / m$$

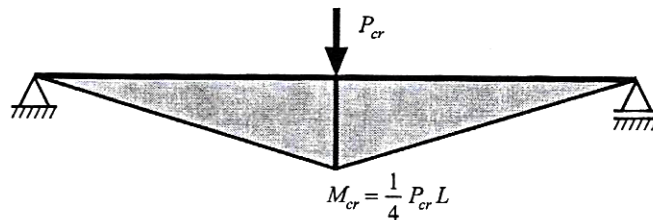
$$M_{cr,0} = i_s \sqrt{(N_{cr,z} N_{cr,T})}$$

Różne podpory

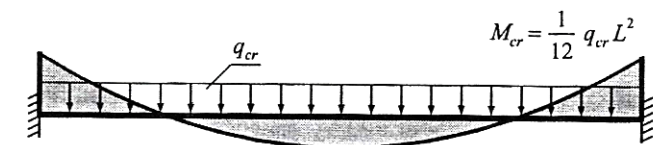
$$m = 0,88$$



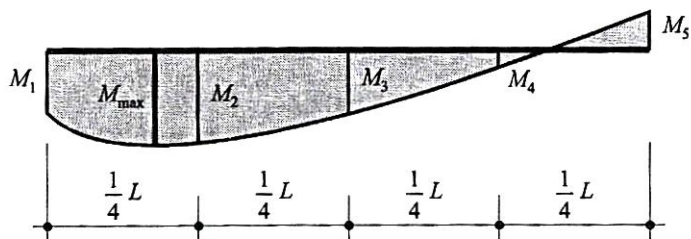
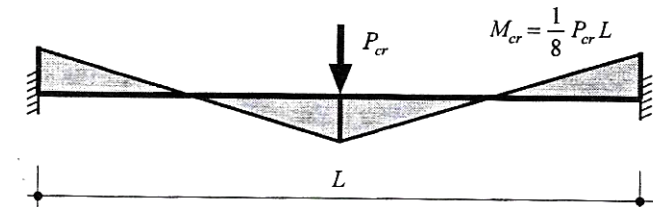
$$m = 0,74$$



$$m = 0,39$$



$$m = 0,59$$



$$m = (3M_2 + 4M_3 + 3M_4 + 2M_{max}) / 12M_{max}$$

Rys: K. Rykaluk, *Konstrukcje stalowe, podstawy i elementy*, DWE Wrocław 2001

Access Steel (\rightarrow #t / 75):

$$\begin{aligned}
 M_{cr} &= C_1 [\pi^2 EJ_z / (\mu_z l_{0z})^2] \{ \sqrt{[(\mu_z / \mu_T)^2 (J_w / J_z) + (\mu_z l_{0z})^2 GJ_t / (\pi^2 EJ_z) + (C_2 z_g)^2]} - C_2 z_g \} = \\
 &= C_1 N_{cr, z} \{ \sqrt{[\mu_z^2 J_w \pi^2 E / (\mu_T^2 \pi^2 EJ_z) + (\mu_T \mu_z l_{0z})^2 GJ_t / (\mu_T^2 \pi^2 EJ_z) + (C_2 z_g)^2]} - C_2 z_g \} = \\
 &= C_1 N_{cr, z} \{ \sqrt{[(\mu_z \mu_T l_{0z})^2 [\pi^2 EJ_w / (\mu_T l_{0z})^2 + GJ_t] / (\mu_T^2 \pi^2 EJ_z) + (C_2 z_g)^2]} - C_2 z_g \} = \\
 &= C_1 N_{cr, z} \{ \sqrt{[N_{cr, T} i_s^2 (\mu_z \mu_T l_{0z})^2 / (\mu_T^2 \pi^2 EJ_z) + (C_2 z_g)^2]} - C_2 z_g \} = \\
 &= C_1 N_{cr, z} \{ \sqrt{[N_{cr, T} i_s^2 / N_{cr, z} + (C_2 z_g)^2]} - C_2 z_g \} = \\
 &= - C_1 C_2 z_g N_{cr, z} + \sqrt{[(C_1 C_2 z_g N_{cr, z})^2 + C_1^2 N_{cr, z} N_{cr, T} i_s^2]} = \\
 &= - \Psi N_{cr, z} + \sqrt{[(\Psi N_{cr, z})^2 + \Xi^2 N_{cr, z} N_{cr, T} i_s^2]} = \\
 &= +/- A_0 N_{cr, z} + \sqrt{[(A_0 N_{cr, z})^2 + B^2 i_s^2 N_{cr, z} N_{cr, T}]}
 \end{aligned}$$

PN-B przypadek ogólny dla belki jednoprzęsłowej (\rightarrow #t / 70)

Ogólna idea:

$$M_{cr} = \sqrt{[\Xi^2 N_{cr,z} N_{cr,T} i_s^2 + (\Psi N_{cr,z})^2]} - \Psi N_{cr,z}$$

M_{cr} = funkcja { [parametry Ξ Ψ (warunki podparcia)] ; [siły krytyczne (warunki podparcia)] }

PN B 3200: A_1, A_2, B, C_1, C_2 (\rightarrow #t / 72);

Access Steel: C_1, C_2 (\rightarrow #t / 75);

Literatura: różnie oznaczane (\rightarrow #t / 76);

Współczynniki C wg
PN i AS to zupełnie
różne rzeczy

Raczej „ogólny typ podpór”
(przegubowe, sztywne)

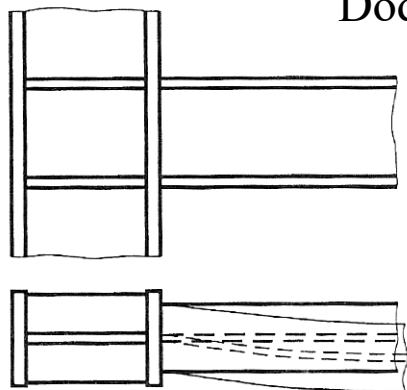
$$N_{cr,z} = \pi^2 EJ_z / (\mu_z l_{0z})^2$$
$$N_{cr,T} = [\pi^2 EJ_w / (\mu_T l_{0T})^2 + GJ_t] / i_s^2$$

Długości krytyczne (\rightarrow #t / 84);

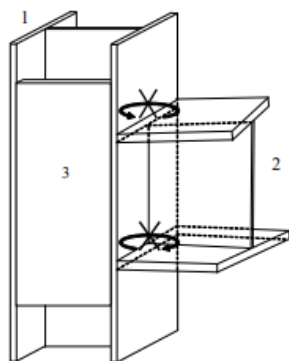
Raczej „lokalny typ podpór” (wpływ podpór
ale i stężeń zmieniających długości
wyboczeniowe)

Przykłady: różne rozwiązania techniczne węzła rygiel-słup

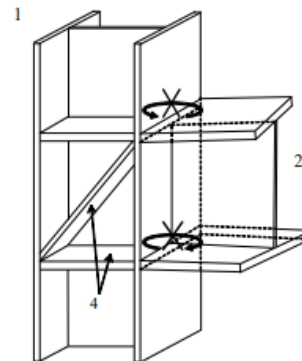
Dodatkowe żebra lub blachy węzłowe



Rys: K. Rykaluk, *Konstrukcje stalowe, podstawy i elementy*, DWE Wrocław 2001

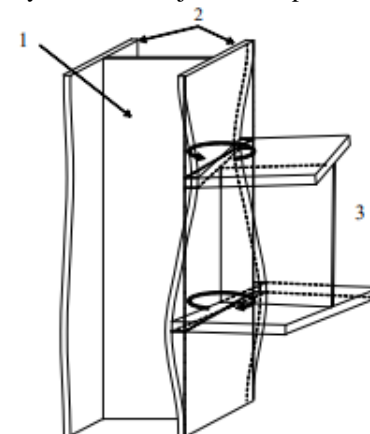


Rys: eurocodes.jrc.ec.europa.eu



Brak dodatkowych blach

Rys: eurocodes.jrc.ec.europa.eu



Dla sił krytycznych: $\mu_z = 0,5$; $\mu_z = 0,5$

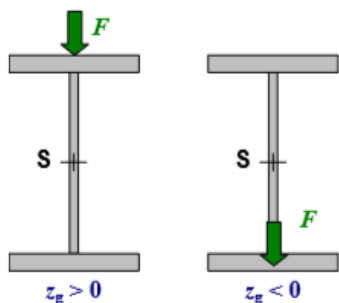
Dla współczynników, oba przypadki:

Podpora		Współczynnik długości krytycznej	
względem y	względem z	μ_z	μ_T
U = utwierdzenie		0,5	0,5

Dla sił krytycznych (bezpieczne oszacowanie): $\mu_z = 1,0$; $\mu_z = 1,0$

5. Punkt przyłożenia obciążenia

Wartość M_{cr} zależy od miejsca, do którego przykładane jest obciążenie. We wzorze ogólnym podana jest odległość między punktem przyłożenia obciążenia a środkiem ścinania: z_g lub a_s .



$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{k}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g)^2} - C_2 z_g \right\} \quad (1)$$

$$M_{cr} = \pm A_0 N_y + \sqrt{(A_0 N_y)^2 + B^2 i_s^2 N_y N_z}$$

gdzie: $A_0 = A_1 b_y + A_2 a_s$; A_1, A_2, B - wg tabl. Z1-2;

Rys: PN B-3200

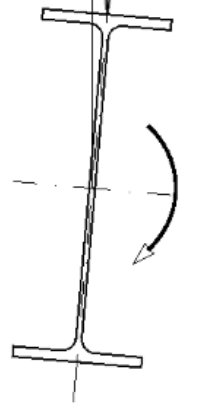
Rys: eurocodes.jrc.ec.europa.eu

Wartość M_{cr} jest niższa dla półki górnej a wyższa dla dolnej (belka szybciej utraci stateczność, gdy obciążona jest półka górna)

e
Obciążenie

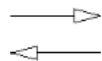
Odkształcenie od imperfekcji

Dodatkowe odkształcenie od momentu skręcającego

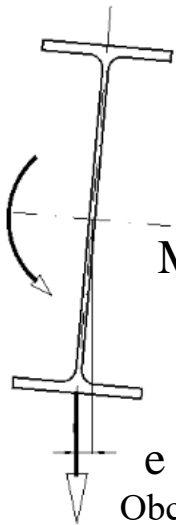


$$M_T = \text{obciążenie} \cdot e$$

Odkształcenie od imperfekcji



Dodatkowe odkształcenie od momentu skręcającego



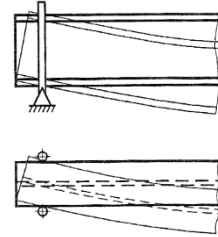
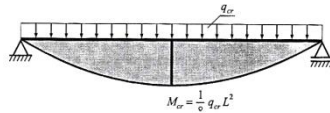
$$M_T = \text{obciążenie} \cdot e$$

Rys: Autor

Imperfekcja wstępna daje mimośród e i moment skręcający M_T jako wtórny efekt obciążenia.

Różne punkty przyłożenia obciążenia dają różne deformacje. Deformacje pochodzące od momentu skręcającego mogą nasilać lub wygaszać efekty imperfekcji. W rezultacie, element może utracić stateczność łatwiej (mniejsze M_{cr}) lub trudniej (większe M_{cr})

Przykład: M_{cr} (według PN B 3200 oraz Access steel) dla IPE 300, 12 m rozpiętości, belka jednoprzęsłowa swobodnie podparta, brak stężeń, obciążenie ciągłe:



Rys: K. Rykaluk, *Konstrukcje stalowe, podstawy i elementy*, DWE Wrocław 2001

Przyłożenie obciążenia do	M_{cr} [kNm]	
	PN B 3200	Access Steel
półki górnej (150 mm ponad środkiem ciężkości)	39,829	39,512
środka ścinania (= środka ciężkości dla dwuteownika bisymetrycznego)	46,224	45,697
półki dolnej (150 mm poniżej środka ciężkości)	53,646	52,851

Mały M_{cr} → mały współczynnik zwiczenia → mała nośność krytyczna

3. Zmienne EJ jest rozpatrywane w taki sam sposób jak dla wyboczenia.

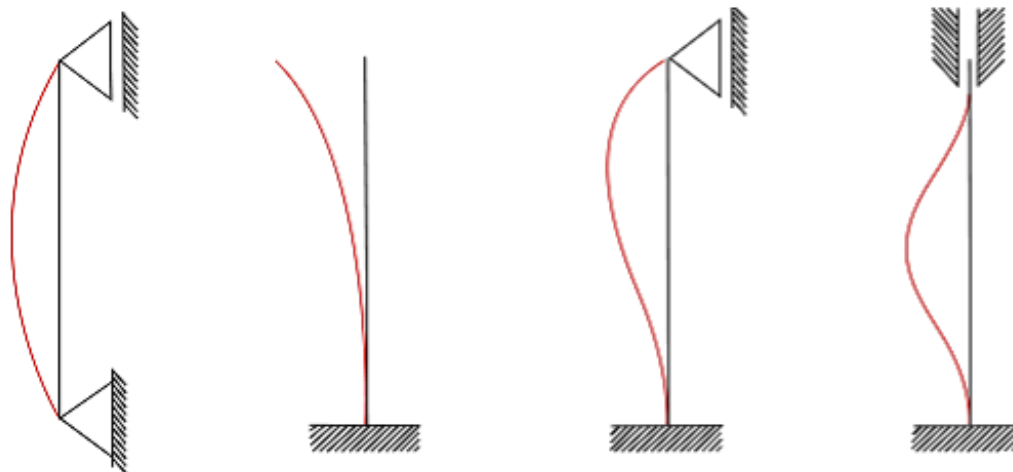
EJ = const jest najczęstszą sytuacją. Różnice dla $\alpha \leq 10^\circ$ są pomijalne, liczymy EJ = min (EJ₁ ; EJ₂). Dla $\alpha > 10^\circ$ stosowane są odrębne wzory. Więcej informacji podane będzie na wyk #12.

6. Krzywą oś pręta analizujemy tak samo jak dla wyboczenia.

6.a. Krzywa oś pręta → wpływ imperfekcji → Odmienne krzywe wyboczeniowe → #t / 86

6.b. Krzywa oś pręta → łuk → stateczność łuków → Mechanika budowli

4. Jeśli, zamiast dwu przegubów, element podparty jest inaczej, ma on inną postać utraty stateczności (analogicznie jak dla wyboczenia). Także i tutaj wprowadzamy pojęcie długości wyboczeniowej i współczynnika długości wyboczeniowej. Należy pamiętać, że analizujemy także zmianę kąta skręcenia elementu i rodzaj podpory dla skręcania.



Rys: wikipedia

μ	1,0	2,0	0,7	0,5
l_{cr}	$1,0 l_0$	$2,0 l_0$	$0,7 l_0$	$0,5 l_0$

Algorytm

EN 1993-1-1 6.3.2

$\lambda_{LT} = \sqrt{(W_y f_y / M_{cr})}$	EJ = const	$\Phi_{LT} = [1 + \alpha_{LT} (\lambda_{LT} - 0,2) + \lambda_{LT}^2] / 2$ $\alpha_{LT} \rightarrow \text{tab. 6.3, 6.4, 1993-1-1}$	$\chi_{LT} = \min\{$ $1/[\Phi_{LT} + \sqrt{(\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^2)}] ;$ $1,0\}$
	Dwuteowniki gorącawalcowane i spawane	$\Phi_{LT} =$ $= [1 + \alpha_{LT} (\lambda_{LT} - 0,4) + 0,75 \lambda_{LT}^2] / 2$ $\alpha_{LT} \rightarrow \text{tab. 6.4, 6.5, EN 1993-1-1}$	$\chi_{LT} = \min\{$ $1/[\Phi_{LT} + \sqrt{(\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^2)}] ;$ $1/\lambda_{LT}^2$ $;$ $1,0\}$

$$\lambda_{LT} \leq 0,4 \rightarrow \chi_{LT} = 1,0$$

Dla zwichrzenia, tak samo jak dla wyboczenia, rozważa się różne krzywe wyboczeniowe

Przypadek ogólny:

Elementy	Ograniczenia	Krzywa zwichrzenia
Dwuteowniki walcowane	$h/b \leq 2$	a
	$h/b > 2$	b
Dwuteowniki spawane	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d
Inne kształtowniki	-	d

Rys: EN 1993-1-1 tab. 6.4

Rozróżnienie nie jest wyjaśnione



Dwuteowniki gorącowalcowane i spawane:

Elementy	Ograniczenia	Krzywa zwichrzenia
Dwuteowniki walcowane	$h/b \leq 2$	b
	$h/b > 2$	c
Dwuteowniki spawane	$h/b \leq 2$	c
	$h/b > 2$	d

Rys: EN 1993-1-1 tab. 6.5

Krzywa zwichrzenia	a	b	c	d
Parametr imperfekcji α_{LT}	0,21	0,34	0,49	0,76

Rys: EN 1993-1-1 tab. 6.3

Przykład 2

IPE 300

S235 $\rightarrow f_y = 235 \text{ MPa}$

$L = 6,00 \text{ m}$

$E = 210 \text{ GPa}$

$G = 81 \text{ GPa}$

$J_y = 8\,356 \text{ cm}^4$

$J_z = 603,8 \text{ cm}^4$

$W_y = 557,1 \text{ cm}^3$

$W_{pl,y} = 628,4 \text{ cm}^3$

$J_w = 125\,900 \text{ cm}^6$

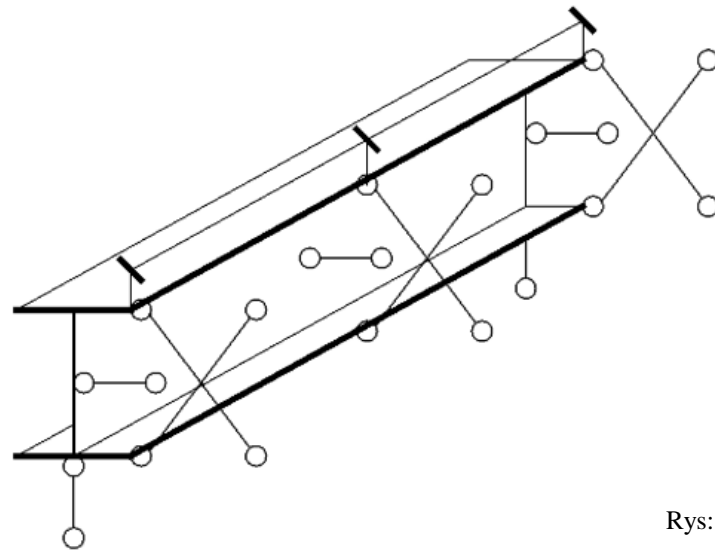
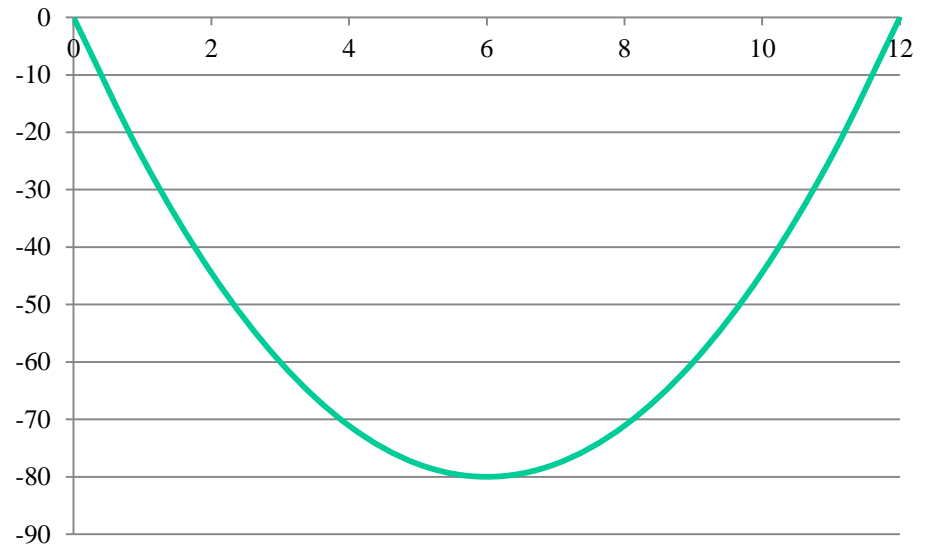
$J_T = 20,12 \text{ cm}^4$

$i_y = 12,46 \text{ cm}$

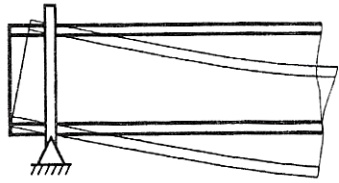
$i_z = 3,35 \text{ cm}$

$y_s = 0,0 \text{ cm}$

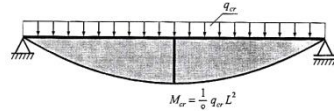
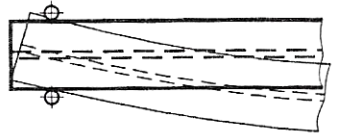
$M_{Ed} = 80 \text{ kNm}$



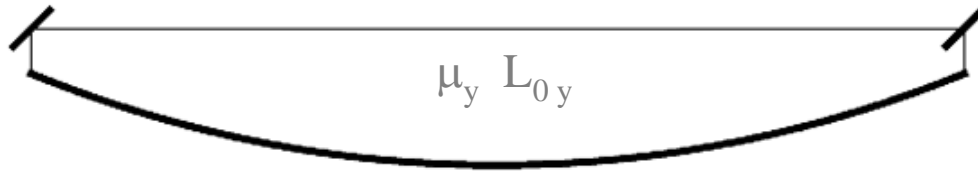
Rys: Autor



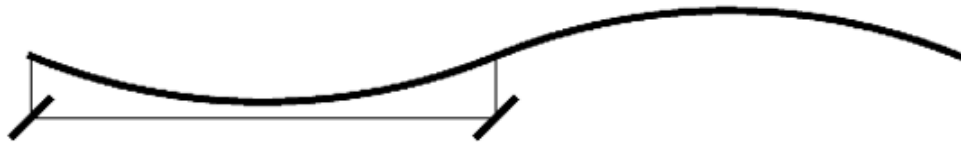
Rys: K. Rykaluk, *Konstrukcje stalowe, podstawy i elementy*, DWE Wrocław 2001



„Kształt globalny” wynikający z podpór:
współczynnik jak dla belki swobodnie
podpartej, $L = 12,00$ m



„Kształt lokalny” wynikający z obecności
stężeń: współczynniki dla sił krytycznych

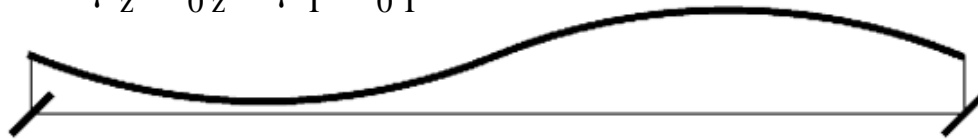


$$L_{0y} = 12,00 \text{ m}$$

$$L_{0z} = 6,00 \text{ m}$$

$$L_{0T} = 6,00 \text{ m}$$

$$\mu_z L_{0z} = \mu_T L_{0T}$$



$$L_{0y} = 2 L_{0z} = 2 L_{0T}$$

Rys: Autor

$$\mu_y = 1,00$$

$$\mu_z = 0,90 - 1,00 \text{ (przyjęto } 1,00)$$

$$\mu_T = 0,90 - 1,00 \text{ (przyjęto } 1,00)$$

Wzór ogólny (obciążenie w środku ciężkości):

$$N_{cr,z} = \pi^2 EJ_z / (\mu_z l_{0z})^2 = \underline{347,603 \text{ kN}} \quad (L_{cr} = 6,00 \text{ m})$$

$$N_{cr,T} = [\pi^2 EJ_w / (\mu_T l_{0T})^2 + GJ_t] / i_s^2 = \underline{1\,463,001 \text{ kN}} \quad (L_{cr} = 6,00 \text{ m})$$

$$i_0 = i_s = 12,90 \text{ cm}$$

$$M_{cr,0} = i_s \sqrt{(N_{cr,z} N_{cr,T})} = \underline{92,011 \text{ kNm}}$$

$$M_{cr} = (\rightarrow \#t / 76) = 1,13 M_{cr,0} = \mathbf{103,972 \text{ kNm}}$$

Wzór z uwzględnieniem punktu przyłożenia obciążenia ($\rightarrow \#t / 80$):

PN B 3200:

$$M_{cr} = \sqrt{[B^2 N_{cr,z} N_{cr,T} i_s^2 + (A_0 N_{cr,z})^2]} - A_0 N_{cr,z}$$

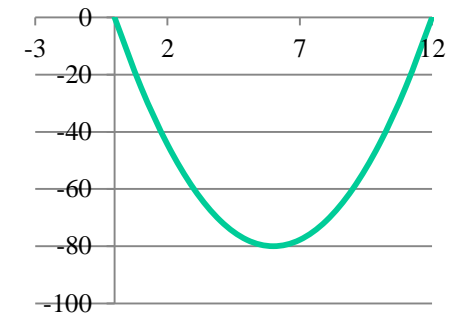
$$A_0 = A_1 b_y + A_2 z_g$$

Access Steel (po przekształceniu):

$$M_{cr} = \sqrt{[C_1^2 N_{cr,z} N_{cr,T} i_s^2 + (C_1 C_2 N_{cr,z} z_g)^2]} - C_1 C_2 N_{cr,z} z_g$$

Obciążenie belki (w płaszczyźnie symetrii przekroju YZ)	Warunki podparcia ¹⁾				Współczynniki				
	w płaszczyźnie		μ_y	μ_x	A_1	A_2	B	C_1	C_2
	YZ	XZ							
Obciążenie równomiernie rozłożone	P	P	1	1	0,61	0,53	1,14	0,93	0,81
	P	P	1	0,5	1,23	0,52	1,31	-	-
	P	U	0,5	0,5	0,68	0,29	0,97	1,43	0,61
	U	U	0,5	0,5	0,27	1,61	1,88	0,15	0,91

Rys: PN B-3200



Rys: Autor

Rys: eurocodes.jrc.ec.europa.eu

$$A_0 = A_1 b_y + A_2 z_g$$

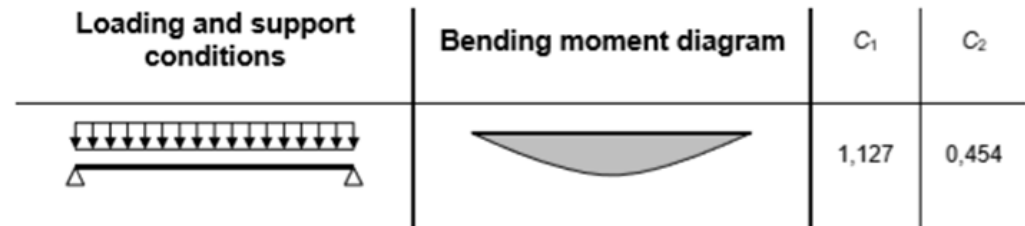
$$b_y = y_s - r_x / 2$$

y_s = odległość środka ciężkości od
środku ścinania, dla przekroju
bisymentrycznego = 0

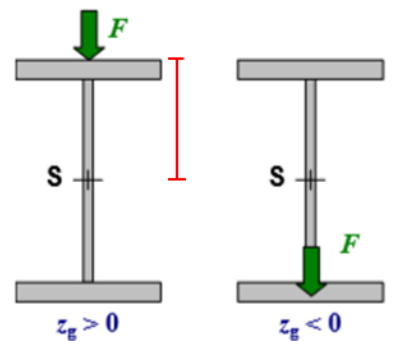
r_x = ramię asymetrii (\rightarrow #t / 41-43);
dla przekroju bisymentrycznego = 0

$$A_0 = A_2 z_g$$

Rys: eurocodes.jrc.ec.europa.eu



$$z_g = h / 2$$



$$z_g = -h / 2$$

PN B 3200:

$$M_{cr} = \sqrt{[1,14^2 N_{cr,z} N_{cr,T} i_s^2 + (0,53 N_{cr,z} z_g)^2]} - 0,53 N_{cr,z} z_g$$

Access Steel:

$$M_{cr} = \sqrt{[1,127^2 N_{cr,z} N_{cr,T} i_s^2 + (1,127 \cdot 0,454 N_{cr,z} z_g)^2]} - 1,127 \cdot 0,454 N_{cr,z} z_g$$

$$1,127 \cdot 0,454 = 0,512$$

Położenie obciążenia	M_{cr} [kNm]	
	PN B 3200	Access Steel
Półka górna (150 mm ponad środkiem ciężkości; $z_g = 150$ mm)	80,837	80,395
Środek ścinania (= środek ciężkości dla dwuteownika bisymetrycznego; $z_g = 0$ mm)	104,892	103,696

Wzór ogólny (\rightarrow #t / 89) siła w środku ścinania = **103,972 kNm**

Wnioski

Wzór ogólny $M_{cr, 0} = i_s \sqrt{(N_{cr, z} N_{cr, T})}$ daje praktycznie takie same wyniki, jak dokładna analiza ($\rightarrow \#t / 80$) przy przyłożeniu obciążenia w środku ciężkości.

Ogólny wzór jest dobrym przybliżeniem rzeczywistości dla słupów: większość momentu zginającego pochodzi od współpracujących belek (a zatem można ją uwzględnić jako efekt obciążenia przyłożonego w środku ciężkości), mniejszość pochodzi od rygli ściennych na półce słupa.

Wzór z analizą punktu przyłożenia obciążenia sprawdza się w przypadku belek i dźwigarów dachowych: większość obciążenia przyłożona jest do półki, a tylko niewielka część (ciężar własny belki) do środka ciężkości.

$$M_{cr} = \min(PN \ ; \ AS) = \min(80,837 \ ; \ 80,395) = \underline{80,395 \text{ kNm}}$$

$$W_{y, pl} f_y = 147,674 \text{ kNm}$$

$$\lambda_{LT} = \sqrt{(W_y f_y / M_{cr})} = 1,355$$

Dwie metody analizy (\rightarrow #t / 86):

Dla EJ = const:	Dla dwuteownika:
IPE 300: goręcowałcowany, $h / b \leq 2,0$	
Krzywa zwichrzeniowa a: $\alpha_{LT} = 0,21$	Krzywa zwichrzeniowa b: $\alpha_{LT} = 0,34$
$\Phi_{LT} = [1 + \alpha_{LT} (\lambda_{LT} - 0,2) + \lambda_{LT}^2] / 2 =$ $= 1,540$	$\Phi_{LT} = [1 + \alpha_{LT} (\lambda_{LT} - 0,4) + 0,75 \lambda_{LT}^2] / 2 =$ $= 1,351$
$\chi_{LT} = \min\{1 / [\Phi_{LT} + \sqrt{(\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^2)}] ; 1,0\} =$ $= \min(0,440 \ ; \ 1,0) = 0,440$	$\chi_{LT} = \min\{1 / [\Phi_{LT} + \sqrt{(\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^2)}] ; 1 / \lambda_{LT}^2 ; 1,0\}$ Niemożliwe do zastosowania: $\sqrt{(\Phi_{LT}^2 - \lambda_{LT}^2)} =$ $= \sqrt{(1,351^2 - 1,355^2)} = \sqrt{(-0,011)}$

EN 1993-1-1 6.3.2.2.(2)

M_{cr} opiera się na właściwościach przekroju poprzecznego brutto i uwzględnia warunki obciążenia, rzeczywisty rozkład momentów i podparcie boczne.

Zatem, rzeczywisty kształt momentu zginającego powinien być (?) uwzględniony dwukrotnie: w M_{cr} i w przeliczeniu $\chi_{LT, mod} \rightarrow \#t / 67$

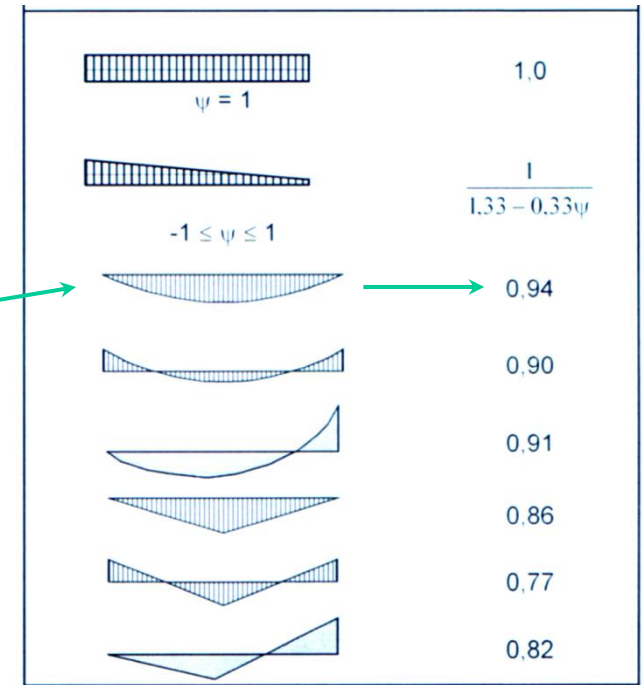
$$\chi_{LT, mod} = \chi_{LT} / f$$

$$f = \min \{ 1 - 0,5(1-k_c)[1 - 2(\lambda_{LT} - 0,8)^2]; 1,0 \}$$

$$k_c = 0,94$$

$$f = 0,988$$

$$\chi_{LT, mod} = 0,445$$



Rys: EN 1993-1-1 tab 6.6

$$W_{pl, y} f_y = 147,674 \text{ kNm}$$

$$\chi_{LT, mod} W_{pl, y} f_y = 65,73 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = 80,000 \text{ kN}$$

$$M_{Ed} / W_{pl, y} f_y = 0,542$$

OK.

$$M_{Ed} / \chi_{LT, mod} W_{pl, y} f_y = 1,217$$

Źle, zwichrzenie!

Rozwiązanie: inna odległość między podporami → zmiana sił krytycznych dla wyboczenia względem osi z i wyboczenia skrętnego.

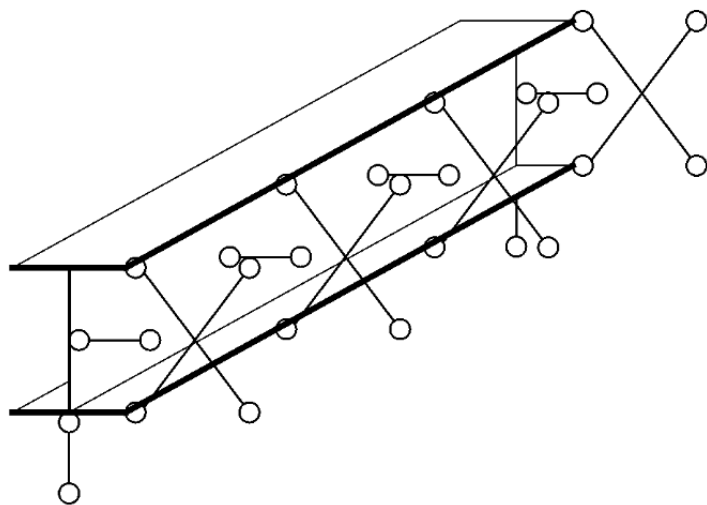
$$L_{0y} = 12,00 \text{ m}$$

$$L_{0z} = 4,00 \text{ m}$$

$$L_{0T} = 4,00 \text{ m}$$

$$N_{cr,z} = \underline{782,108 \text{ kN}}$$

$$N_{cr,zT} = \underline{2\,007,228 \text{ kN}}$$



Rys: Autor

$$M_{cr} = \min(PN ; AS) = 131,800 \text{ kNm}$$

$$\lambda_{LT} = 1,059$$

$$\Phi_{LT} = 1,150$$

$$\chi_{LT} = 0,625$$

$$\chi_{LT, mod} = 0,641$$

$$\chi_{LT, mod} W_{pl,y} f_y = 94,711 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} / (\chi_{LT, mod} W_{pl,y} f_y / \gamma_{M0}) = 0,845 \text{ OK}$$

Zagadnienia egzaminacyjne

Różnica między nośnością a statecznością

Przyczyny niestateczności

Rodzaje niestateczności

Podobieństwa i różnice dla wyboczenia i zwichrzenia

Dziękuję za uwagę

© 2025 dr inż. Tomasz Michałowski

tmichal@pk.edu.pl