

Andrzej FLAGA<sup>1</sup>  
Tomasz MICHAŁOWSKI<sup>2</sup>

## CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNE KŁADEK DLA PIESZYCH

### DYNAMIC CHARACTERISTICS OF FOOTBRIDGES

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono podstawowe charakterystyki dynamiczne kilku kładek dla pieszych, otrzymane na podstawie badań własnych, użyteczne w obliczeniach dynamicznych kładek oraz w ocenie stanów granicznych ich użytkowania.

**Abstract.** In the paper, basic dynamic characteristic a few of footbridges, determined on the basis of own experiments, useful in dynamic calculations of footbridges and in evaluation of their serviceability limit states, have been presented.

#### Wstęp

Najczęściej stosowanymi charakterystykami dynamicznymi obiektów budowlanych są częstotliwości i postaci drgań własnych oraz parametry tłumienia drgań. W przypadku układu drgającego o  $i$ -tym stopniu swobody z tłumieniem wiskotycznym równanie ruchu i jego rozwiązanie przedstawia się następująco:

$$M_i y_i'' + C_i y_i' + K_i y_i = 0 \quad (1)$$

$$y_i(t) = A_i e^{-\beta_i t} \sin \omega_i^* t + B_i e^{-\beta_i t} \cos \omega_i^* t = C_i e^{-\beta_i t} \sin (\omega_i^* t + \phi_i) \quad (2)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}}, \quad f_i = \omega_i / (2\pi), \quad T_i = 1 / f_i \quad (3)$$

$$(\omega_i^*)^2 = \omega_i^2 - \beta_i^2 \quad (4)$$

$$\beta_i = c/2m, \quad \delta_i = \ln \{ y_i(t) / y_i(T_i+t) \} = \beta_i T_i, \quad \xi_i = \beta_i / \omega_i^*, \quad \xi_i \approx \delta_i / 2\pi \quad (5)$$

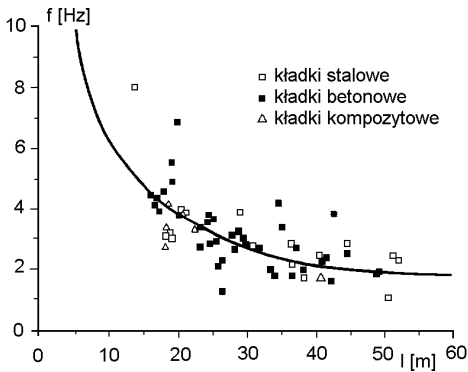
gdzie:  $M_i$ ,  $C_i$ ,  $K_i$  – odpowiednio uogólniona masa, tłumienie i sztywność układu;  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  – amplitudy drgań,  $\phi_i$  – kąt przesunięcia fazowego,  $\omega_i$ ,  $\omega_i^*$  – odpowiednio częstość kołowa drgań własnych nietłumionych i tłumionych,  $f_i$  – częstość drgań własnych,  $T_i$  – okres drgań,  $\beta_i$  - współczynnik tłumienia drgań,  $\delta_i$  - logarytmiczny dekrement tłumienia drgań,  $\xi_i$  - ułamek tłumienia krytycznego.

<sup>1</sup> Prof. dr hab. inż., Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej; Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej Politechniki Lubelskiej

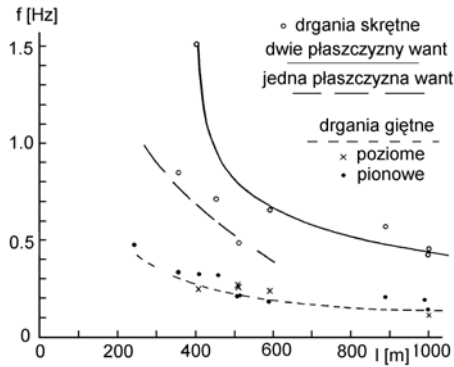
<sup>2</sup> Dr inż., Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej

# 1. Porównanie charakterystyk dynamicznych różnych kładek dla pieszych

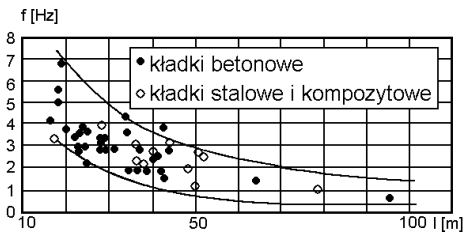
Znajomość charakterystyk dynamicznych kładek jest istotna przy analizie szeroko rozumianych stanów granicznych tych obiektów, takich jak komfort użytkowania, możliwość wzbudzenia rezonansowego czy też nośność lub odkształcenia konstrukcji. W literaturze (por. [1] ÷ [4]) spotkać można porównanie i oszacowanie wartości podstawowych częstotliwości drgań własnych oraz wartości parametrów tłumienia i sztywności różnego typu kładek. Zależności przedstawiono na rysunkach 1 ÷ 7.



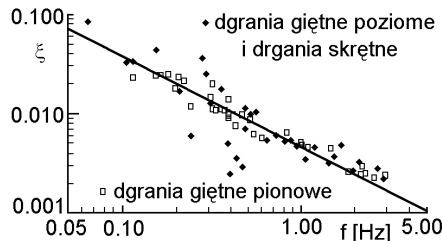
Rys. 1. Zależność między rozpiętością a częstotliwością drgań własnych kładek [1].



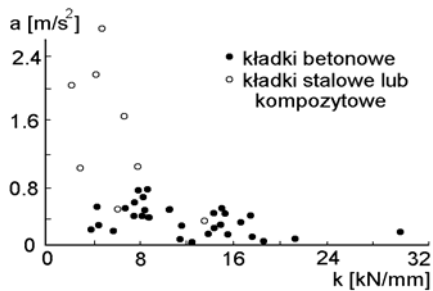
Rys. 2. Zależność między rozpiętością a częstotliwością drgań własnych mostów podwieszonych [2].



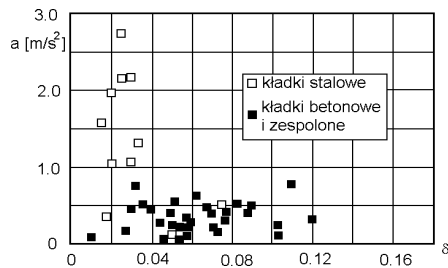
Rys. 3. Zależność między rozpiętością a częstotliwością drgań własnych kładek wstęgowych [3].



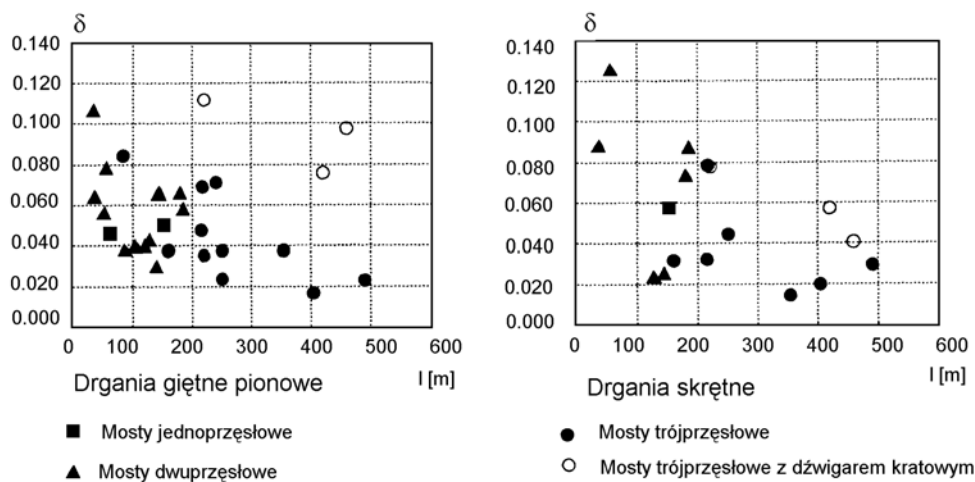
Rys. 4. Zależność między częstotliwością drgań własnych a ułamkiem tłumienia krytycznego mostów wiszących [1].



Rys. 5. Zależność między sztywnością a odpowiedzią dynamiczną kładek [1].



Rys. 6. Zależność między logarytmicznym dekrementem tłumienia drgań a odpowiedzią dynamiczną kładek [3].



Rys. 7. Zależność między rozpiętością a logarytmicznym dekrementem tłumienia drgań mostów podwieszonych [4].

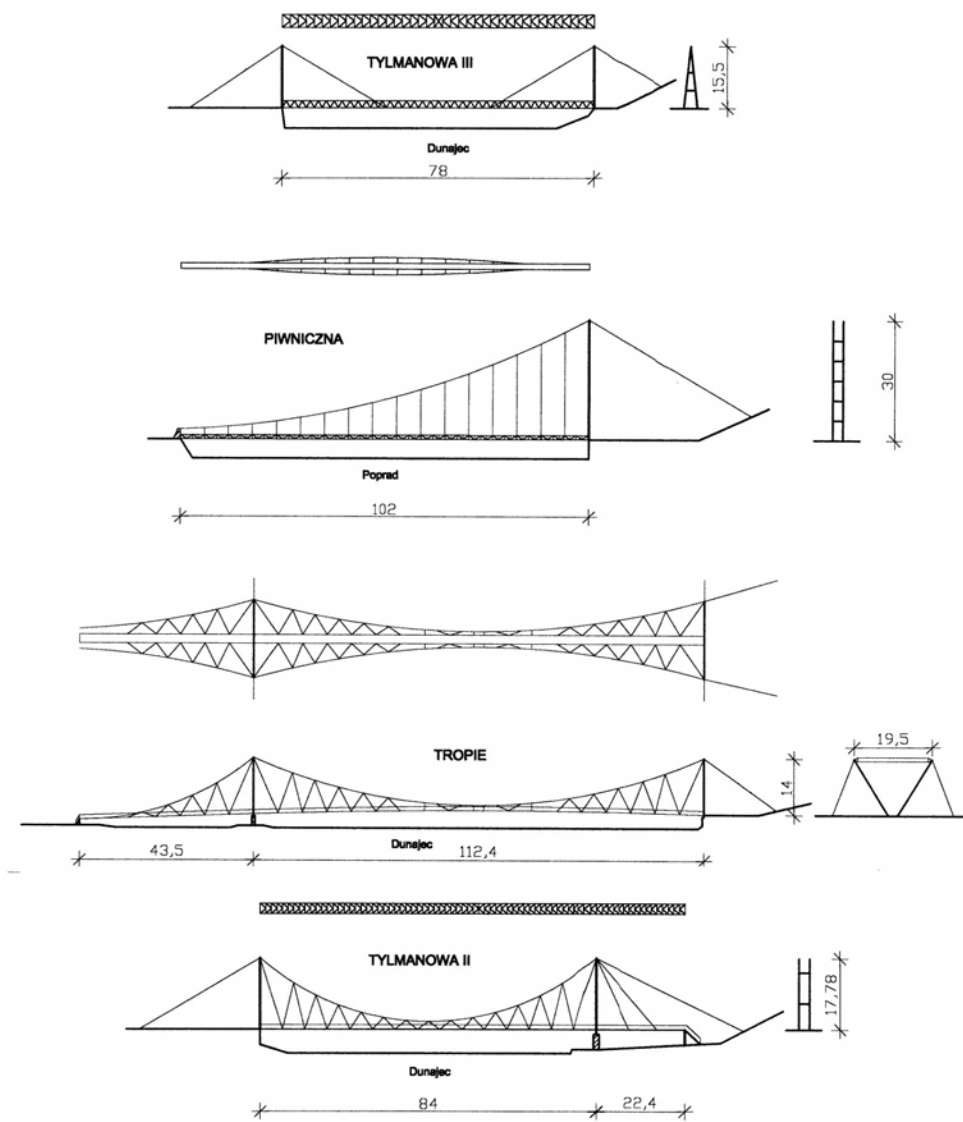
## 2. Badania własne charakterystyk dynamicznych kładek i analiza wyników badań

### 2.1. Częstotliwości drgań własnych

W roku 1998 przeprowadzono badania dynamiczne in situ czterech kładek dla pieszych: podwieszanej w Tylmanowej, wiszącej w Piwnicznej, wiszącej w Tropiu i wiszącej w Tylmanowej. Badania wykonał zespół pracowników Laboratorium Instytutu Mechaniki budowli Politechniki Krakowskiej pod kierunkiem inż. A. Abratańskiego, z udziałem Autorów niniejszej pracy.

Wygląd badanych kładek przedstawiono na rysunku 8. Na kładkach dokonano pomiarów drgań własnych czujnikami drogi i akcelerometrami, założonymi w połowie i w jednej czwartej rozpiętości przęsła. Wzbudzane były kolejno drgania giętnie pionowe, poziome i skrętne przęsła, zarówno symetryczne, jak i antysymetryczne. Drgania wzbudzane były przez balansowanie ciałem wielu osób, znajdujących się na kładce. Zarejestrowane przebiegi posłużyły do wyznaczenia częstotliwości drgań własnych oraz logarytmicznych dekrementów tłumienia drgań.

Założono, że odpowiedzi kładek są sumami tłumionych drgań harmonicznycch o różnych częstotliwościach i różnych parametrach tłumienia. Zarejestrowane przebiegi poddano analizie spektralnej, wykonując na nich szybką transformację Fouriera (FFT). Częstotliwości drgań własnych są identyfikowane jako lokalne ekstrema poszczególnych transformat Fouriera. Następnie przy pomocy programu obliczeniowego Algor dokonano obliczeń częstotliwości drgań własnych analizowanych kładek. Uwzględniono nieliniową pracę lin nośnych. Analizowano przypadek małych drgań własnych konstrukcji obciążonych ciężarem własnym i siłami sprężającymi w linach nośnych. Wyniki analizy porównawczej dla kilku najniższych częstotliwości przedstawia tablica 1.



Rys. 8. Wygląd badanych kładek [5].

Tablica 1. Porównanie wyników badań i obliczeń częstotliwości drgań własnych [5].

Kładka	Badania	Obliczenia	Szacunkowo na podstawie literatury
Podwieszona w Tylmanowej	1.2 Hz drgania giętne poziome	1.06 Hz drgania giętne poziome	1,4 Hz drgania giętne
	2.3 Hz drgania giętne poziome	2.35 Hz drgania giętne poziome	
Wisząca w Piwnicznej	0.8 Hz drgania giętne poziome	0. 57 Hz drgania skrętno-giętne	0,8 Hz drgania giętne
	1.1 Hz drgania giętne pionowe	1.14 Hz drgania giętne pionowe	
	2.0 Hz drgania giętne poziome	1.83 Hz drgania skrętno-giętne	
Wisząca w Tropiu	0.7 Hz, drgania giętne poziome	0.55 Hz drgania skrętno-giętne	0,7 Hz drgania giętne
	1.2 Hz, drgania giętne poziome	1.18 Hz drgania skrętno-giętne	
	2.1 Hz drgania giętne pionowe	2.04 Hz drgania giętne pionowe	
Wisząca w Tylmanowej	0.9 Hz drgania giętne poziome	1.23 Hz drgania giętne poziome	0,9 Hz drgania giętne
	1.3 Hz drgania giętne pionowe	-	
	1.6 Hz drgania giętne poziome	-	

## 2.2 Postaci drgań własnych

Na rysunkach 9, 11, 13, 15 zestawiono postaci podstawowych drgań własnych analizowanych kładek. Przedstawiono drgania giętne poziome (y), giętne pionowe (z) i skrętne ( $f_x$ ). Zwraca uwagę sprzężenie drgań giętnych i skrętnych w przypadku kładek w Piwnicznej i Tropiu. W przypadku kładki w Tropiu powodem może być pochylony układ lin nośnych, w przypadku kładki w Piwnicznej zaś obecność poziomych łuków stalowych, usztywniających przeszło.

## 2.3 Logarytmiczne dekrementy tłumienia drgań

Wartości logarytmicznych dekrementów tłumienia drgań obliczono przy pomocy autorskiej procedury obliczeniowej, omówionej szerzej w [6]. Aproksymacji dokonano metodą kollokacyjną, przyjmując jako punkty charakterystyczne ekstrema modułów FFT oraz punkty leżące na wysokości  $1/\sqrt{2}$  tych ekstremów. Aproksymacja posłużyła wyznaczeniu wartości  $\beta_i$ ,  $A_i$ ,  $B_i$ .

Aproksymację przeprowadzono przy następujących założeniach:

- drgania kładek są sumą kilku tłumionych drgań harmonicznnych o różnych częstotliwościach i różnych parametrach tłumienia wiskotycznego;
- rozpatrzono częstości kołowe w przedziale 3 – 35 [rad/s];
- aproksymowano przebieg funkcji  $(FFT)^2$  (kwadrat modułu FFT);

- pominięto piki o wysokości mniejszej niż  $(0.4)^2$  wysokości największego piku w rozpatrywanym przedziale;
- rozpatrzono tylko te przebiegi, w których wystąpiło nie więcej niż 3 piki znaczące.

Przy powyższych założeniach każdorazowo otrzymano  $3N$  równań nieliniowych o  $3N$  niewiadomych, gdzie  $N$  – ilość pików wziętych pod uwagę. Równania te rozwiązano procedurą numeryczną, będącą połączeniem metody Newtona-Raphsona i metody kolejnych przybliżeń. Procedura pozwala na wyznaczenie współczynników równania (2): wartości logarytmicznych dekrementów tłumienia drgań  $\delta_i$  oraz amplitud  $A_i$  i  $B_i$ . W tabelicy 2 zestawiono wyniki analizy numerycznej: zakres wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań dla rozmaitych częstotliwości drgań oraz wartość średnią.

Tablica 2. Logarytmiczne dekrementy tłumienia drgań [6].

Kładka	Częstotliwość [Hz]	Przedział wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań	Wartość średnia logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań	Wartość szacowana z literatury
Podwieszona w Tylmanowej	1,2	0,021÷0,236	0,045	0,03÷0,10
	2,3	0,011÷0,063	0,034	
Wisząca w Piwnicznej	0,8	0,034÷0,092	0,069	0,02÷0,07
	1,1	0,017÷0,067	0,031	
Wisząca w Tropiu	0,7	0,077÷0,154	0,083	0,02÷0,09
	1,2	0,015÷0,184	0,051	
Wisząca w Tylmanowej	0,9	0,028÷0,171	0,056	0,02÷0,06
	1,3	0,080÷0,275	0,099	
	1,6	0,009÷0,0801	0,021	

Zwraca uwagę bardzo duży rozrzut wartości logarytmicznych dekrementów tłumienia drgań w przypadku kładek w Tropiu i wiszącej w Tylmanowej. Obie te kładki są obiektami silnie wyeksploatowanymi, o licznych uszkodzeniach: brakuje niektórych wieszaków lub są one nienapięte. Taki stan techniczny nie stanowi zagrożenia dla bezpieczeństwa konstrukcji, powoduje jednak duże rozpraszanie energii podczas drgań.

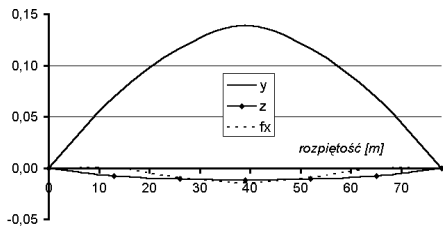
### 3. Analiza zmian częstotliwości i postaci drgań własnych

Dla omawianych kładek przeprowadzono analizę zmian częstotliwości i postaci drgań własnych konstrukcji zdeformowanej w przypadku zmiany sposobu obciążenia kładek. Oprócz ciężaru własnego i sił napinających przyjęto obciążenie boczne parciem statycznym wiatru o prędkości średniej wiatru 20 m/s, zestawionym wg [7]. Wartości współczynników aerodynamicznych przyjęto na podstawie analizy literatury. Tablica 3 podaje zmiany wartości podstawowej częstotliwości drgań własnych.

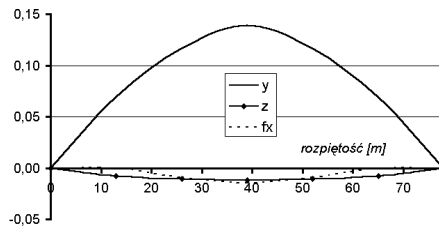
Tablica 3. Zmiany częstotliwości drgań własnych.

Kładka	Obciążenie I: ciężar własny + siły w linach nośnych	Obciążenie II: obciążenie I + parcie wiatru
Podwieszona w Tylmanowej	1,06 Hz	1,08 Hz (+2%)
Wisząca w Piwnicznej	0,57 Hz	0,59 Hz (+4%)
Wisząca w Tropiu	0,55 Hz	0,50 Hz (-9%)
Wisząca w Tylmanowej	1,23 Hz	1,25 Hz (+2%)

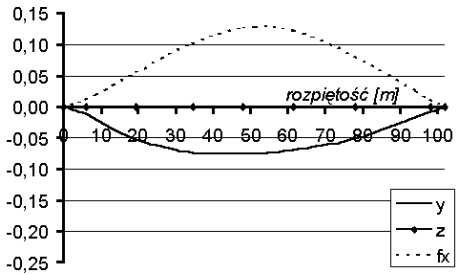
Rysunki 9÷16 pokazują zmiany postaci drgań własnych analizowanych kładek.



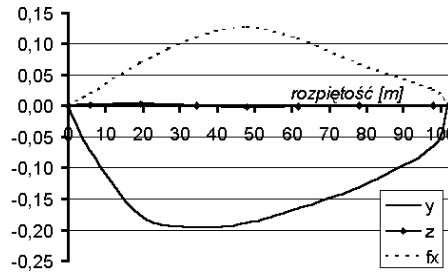
Rys. 9. Tylmanowa, kładka podwieszona, I postać drgań własnych dla obciążenia I [5]



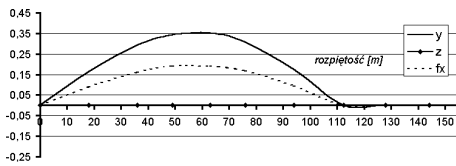
Rys. 10. Tylmanowa, kładka podwieszona, I postać drgań własnych dla obciążenia II.



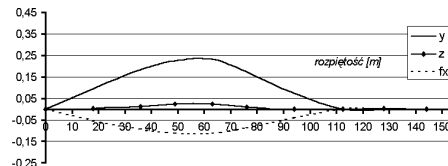
Rys. 11. Piwniczna, postać drgań własnych dla obciążenia I [5].



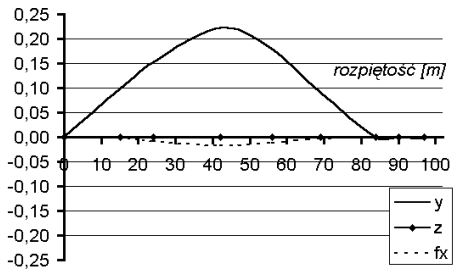
Rys. 12. Piwniczna, postać drgań własnych dla obciążenia II.



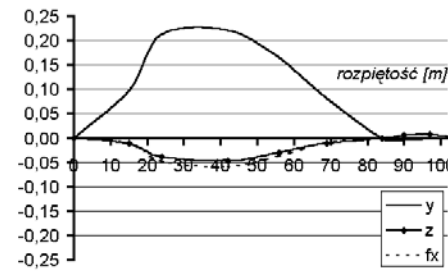
Rys. 13. Tropie, postać drgań własnych dla obciążenia I [5].



Rys. 14. Tropie, postać drgań własnych dla obciążenia II.



Rys. 15. Tylmanowa, kładka wisząca, I postać drgań własnych dla obciążenia I [5]



Rys. 16. Tylmanowa, kładka wisząca, I postać drgań własnych dla obciążenia II.

Zmiana sposobu obciążenia kładek pociąga za sobą zmiany w postaciach drgań własnych oraz nieznaczne zmiany w częstotliwościach drgań własnych, szczególnie dobrze widoczne w przypadku najbardziej wiotkich obiektów (a przy tym najbardziej wyeksploatowanych), jakimi są kładki wiszące w Tropiu i Tylmanowej. Jedynie kładka podwieszona w Tylmanowej jest zbyt sztywna, by obciążenie wiatrem przełożyło się na zmianę postaci drgań własnych.

#### 4. Wnioski

- Nieliniowy model numeryczny pozwala na poprawne oszacowanie częstotliwości drgań własnych, zwłaszcza dla wyższych postaci drgań. Ma to istotne znaczenie w obliczeniach dynamicznych kładek przy wzbudzeniu drgań przez pieszych lub przez wiatr;
- Wzory przybliżone dają dobre oszacowanie najniższych częstotliwości drgań własnych kładek;
- Wartości logarytmicznych dekrementów tłumienia drgań wyliczane z danych doświadczalnych mają duży rozrzut dla obiektów silnie zużytych;
- Dla obiektów o niewielkim stopniu wyeksploatowania wzory przybliżone pozwalają na dobre oszacowanie wartości logarytmicznych dekrementów tłumienia drgań;
- Zmiana sposobu obciążenia może intensywnie wpłynąć na zmianę postaci drgań własnych, zwłaszcza w przypadku konstrukcji wiotkich;
- W przypadku analizy małych drgań konstrukcji wokół odkształconego położenia równowagi uwzględnienie parcia wiatru prowadzi do kilkuprocentowej zmiany wartości częstotliwości drgań własnych.

#### Piśmiennictwo

- [1] Vibration problems in structures, practical guidelines, Bulletin d'information No 209 CEB, praca zbiorowa pod redakcją H. Bachmana, Lozanna 1991.
- [2] Miyata T., Full model testing of large cable-supported bridges, A state of the Art in Wind Engineering, Wiley Eastern Limited, New Delhi 1995.
- [3] Fisher O., Pirner M., Wind induced vibrations of concrete stress-ribbon footbridges, Proc. of the 2<sup>nd</sup> European and African Conference on Wind Engineering; Genoa 1997.
- [4] Ito M., Yamaguchi H., Mode-dependency of structural damping in cable-stayed bridges, Proc. of the 9<sup>th</sup> International Conference on Wind Engineering; New Delhi 1995.
- [5] Michałowski T., Analiza aerodynamiczna sztywności przestrzennej lekkich stalowych kładek dla pieszych, rozprawa doktorska, Kraków 2002.
- [6] Flaga A., Michałowski T., Charakterystyki tłumienia drgań lekkich kładek wiszących i podwieszonych, Inżynieria i Budownictwo 9/2000, 495-497.
- [7] PN/B-02011, Obciążenia w obliczeniach statycznych, obciążenie wiatrem.